Klausur Gewöhnliche Dgl

WS 12/13

1. Berechnen Sie alle Lösungen von $y'''(t) + y(t) = \cos(t)$.

2. Berechnen Sie die orthogonalen Trajektorien zu $\{(x, y)\,;\, y + \arctan(x) = c\}_{c\in\mathbb{R}}$.

3. Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = 2t + \frac{2}{u(t)}, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

   (a) Wie ist die Picard-Iteration definiert für dieses Anfangswertproblem?

   (b) Berechnen Sie eine erste und zweite Approximation mit Hilfe der Picard-Iteration.

4. Wir betrachten

$$x'(t) = 2t\,\sqrt[3]{x(t)} + x(t).$$

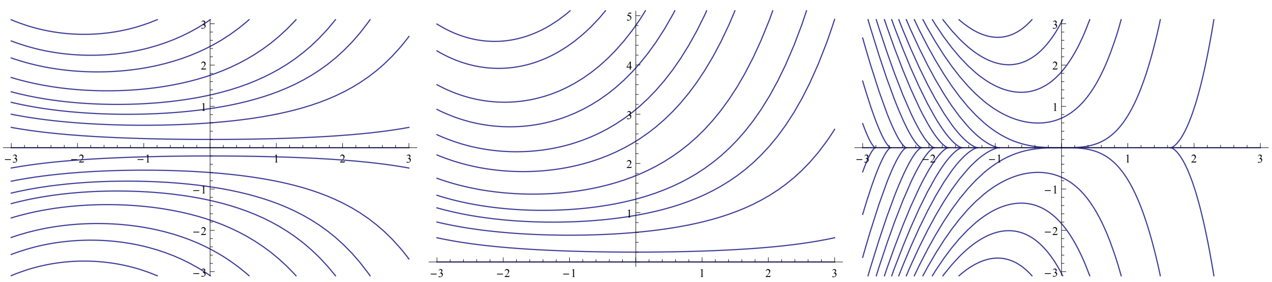
   (a) Von welchem Typ ist diese Differentialgleichung?

   (b) Erfüllt diese Differentialgleichung die Lipschitz-Bedingung?

   (c) Berechnen Sie alle Lösungen mit $x(0) = 1$.

   (d) Welche der drei Skizzen gibt ein gutes Bild aller Lösungen?

   Antworten bitte mit Begründung.



5. Sei M eine reelle 4×4-Matrix. Die Lösungen von

$$\vec{x}'(t) = M\,\vec{x}(t) \;\text{ mit } M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

sind

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Leider hat jemand mit Tinte gekleckert.

(a) Welche Eigenwerte hat M?

(b) Ergänzen Sie M.

(c) Ergänzen Sie den verdeckten Teil der Lösung.

Geben Sie klar Ihre Gründe an.

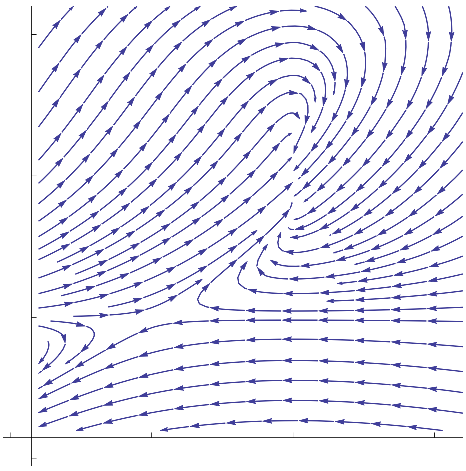
6. Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 - 3y^2 + 3y - x \\ (1-x)\,y \end{pmatrix}$$

und betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t)).$$

Die Gleichgewichtspunkte sind $(1,1)$ und $(0,0)$.
Eine Skizze des Vektorfeldes steht nebenan.



(a) Zeigen Sie, dass es keine weiteren Gleichgewichtspunkte gibt.

(b) Geben Sie die beiden zugehörigen linearisierten Systeme an.

(c) Klassifizieren Sie diese linearisierten Systeme (Stabilität und wenn möglich Typ).

(d) Kann man aus diesen linearisierten Systemen etwas folgern für die Stabilität des Originalsystem bei den Gleichgewichtspunkten?

Begründen Sie Ihre Antworten.

7. Wir betrachten nochmals

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t)) \;\text{ mit } f(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 - 3y^2 + 3y - x \\ (1-x)\,y \end{pmatrix}.$$

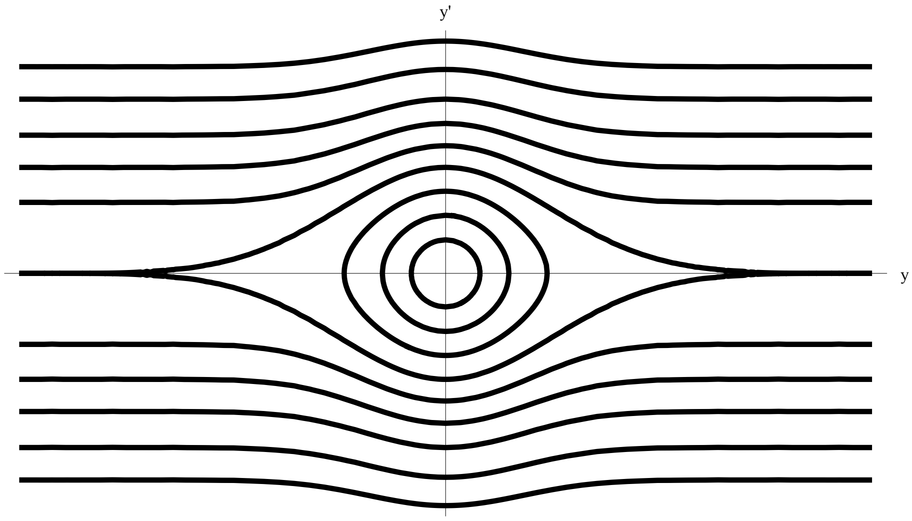
Die Funktion $V(x,y) = 2(x-1)^2 + (y-1)^4 - 4(x-1)(y-1)^3$ ist eine Lyapunov-Funktion bei $(1,1)$. Dies müssen Sie nicht zeigen. Beantworten Sie jedoch die folgenden Fragen.

(a) Was bedeutet dies für das System beim Gleichgewichtspunkt $(1,1)$?

(b) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit diese Funktion V eine Lyapunov-Funktion bei $(1,1)$ ist? Schreiben Sie die Ungleichungen explizit hin.

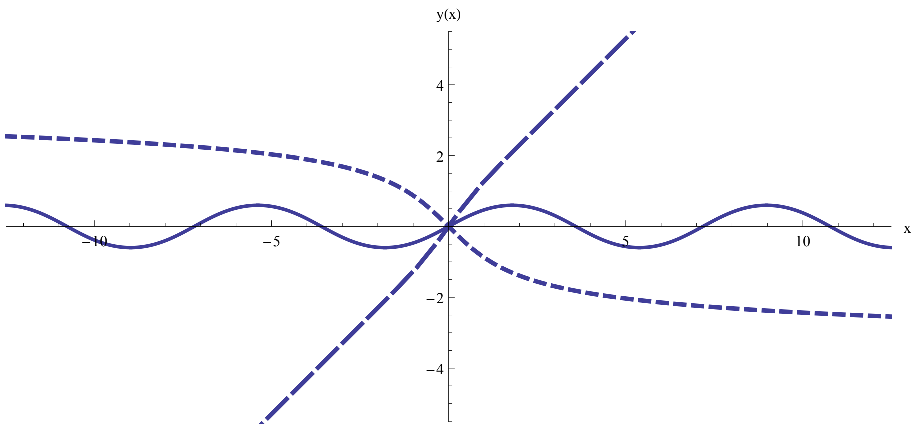
(c) Ist V eine globale Lyapunov-Funktion?

8. Es folgt eine Skizze der Phasenebene zu $y''(x) = -y(x)\, e^{-y(x)^2}$.



(a) Berechnen Sie die Gleichungen zu den Kurven in der Phasenebene.

(b) Das nächste Bild gibt Skizzen dreier Lösungen. Beschreiben oder zeichnen Sie die zugehörigen Kurven in der Phasenebene.



9. Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} u'(t) = -e^{-t^2} - \frac{1}{u(t)}, \\ \quad u(0) = a \neq 0. \end{cases}$$

Das maximale Existenzintervall für die von a anhängige Lösung u_a nennen wir (T_a^-, T_a^+). Hier unten steht die Skizze einiger Lösungen der Differentialgleichung mit den Hilfskurven $u = -e^{t^2}$ und $u = 0$.

(a) Was bedeuten diese Hilfskurven?

Weiter gilt $a > 0$:

(b) Zeigen Sie, dass $T_a^- = -\infty$.

(c) Zeigen Sie, dass $T_a^+ < \infty$.

(d) Zeigen Sie, dass $\lim_{t \uparrow T_a^+} u_a(t) = 0$.

Sei nun $a = 1$:

(e) Zeigen Sie, dass $T_1^+ \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.