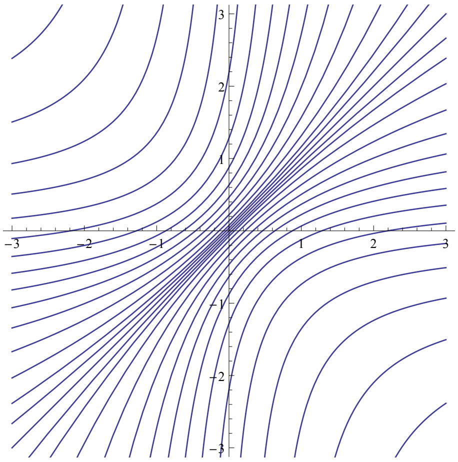
Nachklausur Gewöhnliche Dgl

WS 12/13

1. Berechnen Sie alle Lösungen von $u'(x) = \dfrac{1+u(x)^2}{1+x^2}$, inklusive des maximalen Existenzintervalls.

   Hinweis. Für Ihre Kontrolle steht hier eine Skizze der Lösungen.



2. Berechnen Sie alle (reellen) Lösungen von
$$y''''(t) + 2y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^t.$$
   Hinweis: Zwei Lösungen von $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$ sind $z_1 = i$ und $z_2 = -1 + i$.

3. Der wichtigste Satz für gewöhnliche Differentialgleichungen liefert, wenn die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist, Existenz und Eindeutigkeit bei einem Anfangswertproblem vom Typ
$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), \\ u(x_0) = u_0. \end{cases}$$
   (a) Geben Sie den Satz und die dazugehörige Lipschitz-Bedingung an.

   (b) In welchem Schritt des Beweises verwendet man diese Lipschitz-Bedingung?

4. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 5 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   und die Vektoren
$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   Es gilt $A\varphi_1 = 4\varphi_1$, $A\varphi_2 = -4\varphi_2$, $A\varphi_3 = 2\varphi_3$ und $A\varphi_4 = 2\varphi_4 + \varphi_3$.

   ▶ Geben Sie die allgemeine Lösung für $x'(t) = Ax(t)$ an.

5. Seien die Kurvenscharen $\mathcal{F} = \{f(x,y) = c\}_{c\in\mathbb{R}}$ und $\mathcal{G} = \{g(x,Y) = c\}_{c\in\mathbb{R}}$ derartig, dass jede Kurve aus $\mathcal{F}$ und jede Kurve aus $\mathcal{G}$ sich nur mit Winkel $\frac{1}{4}\pi$ schneiden können.

   Behauptung: *Beschreibt $x \mapsto y(x)$ eine differenzierbare Kurve in $\mathcal{F}$ und $x \mapsto Y(x)$ eine differenzierbare Kurve in $\mathcal{G}$, die sich in x_0 schneiden, so gilt*

$$Y'(x_0) = \frac{y'(x_0) - 1}{y'(x_0) + 1} \text{ oder } Y'(x_0) = \frac{1 + y'(x_0)}{1 - y'(x_0)}. \qquad (\clubsuit)$$

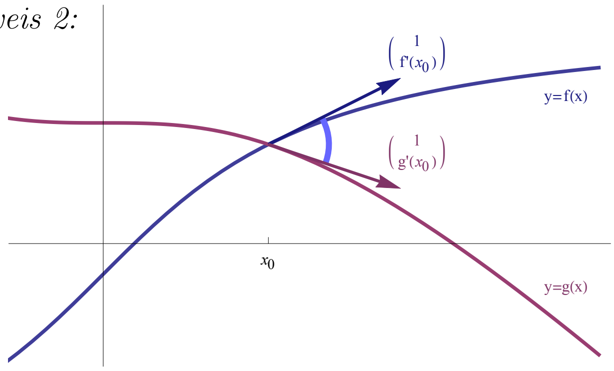
   ▶ Zeigen Sie diese Behauptung.

   Hinweis 1:

   Sei $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Für den eingeschlossenen Winkel $\varphi = \measuredangle\vec{u}O\vec{v}$ gilt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\varphi)\, \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|.$$

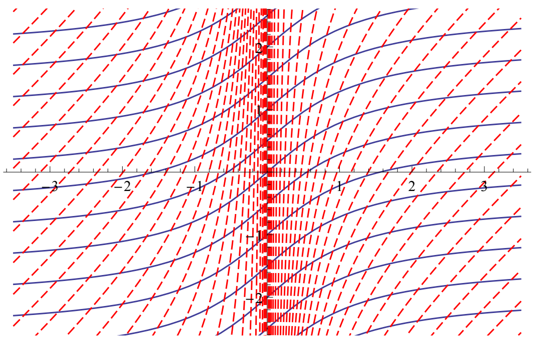
   Hinweis 2:

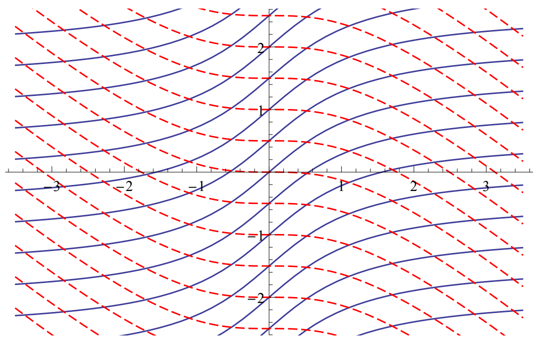


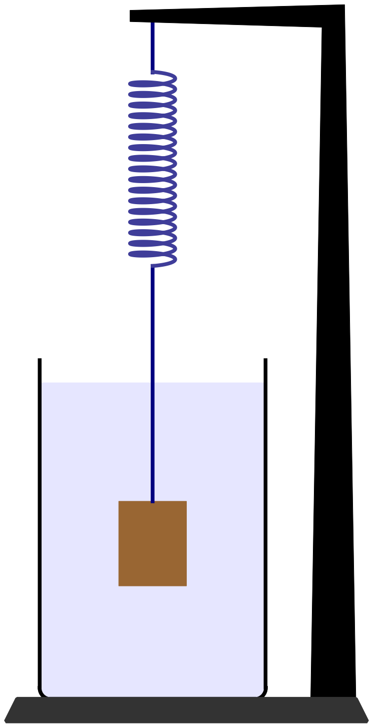
6. Gegeben ist die Kurvenschar $\mathcal{F} = \{y - \arctan(x) = c\}_{c\in\mathbb{R}}$.

   ▶ Berechnen Sie eine Kurvenschar $\mathcal{G}$, deren Kurven die von $\mathcal{F}$ mit Winkel $\frac{1}{4}\pi$ schneiden.

   NB. Wegen ($\clubsuit$) gibt es zwei solcher Kurvenscharen, deren beide Bilder man hier findet. Passt eins zu Ihrer Antwort?







▶ Welche der unteren Differentialgleichungen passt am Besten zu einem Gewicht im Wasser, das an einer Feder hängt und in vertikaler Richtung hin- und herschwingen kann? In der Skizze ist das Gewicht in der Ruhelage. Die Höhe h wird vom Boden des Behälters gemessen. Bei den Bewegungen, die man betrachtet, bleibt das Gewicht ganz im Wasser und berührt den Boden nicht.

▶ Welche Vorzeichen haben die Konstanten c_i?

(a) $h''(t) = c_0 + c_1\ h(t) + c_2\ |h'(t)|$,

(b) $h''(t) = c_0 + c_1\ h(t) + c_2\ |h'(t)|^2$,

(c) $h''(t) = c_0 + c_1\ h(t) + c_2\ h'(t)\,|h'(t)|$,

(d) $h''(t) = c_0 + c_1\ h(t) + c_2\ h(t)\,|h'(t)|$.

7. Begründen Sie Ihre Antworten.

8. Wir definieren $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-2x-y)\,x \\ (3-x-2y)\,y \end{pmatrix}$$

und betrachten

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie alle Gleichgewichtspunkte.

(b) Geben Sie das zum Gleichgewichtspunkt $(1,1)$ gehörige linearisierte System an.

(c) Klassifizieren Sie dieses linearisierte System (Stabilität und wenn möglich Typ).

(d) Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t))$ für die Lösung mit Anfangwerten $(x(0), y(0)) = (1,0)$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

9. Wir betrachten nochmals

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-2x(t)-y(t))\,x(t) \\ (3-x(t)-2y(t))\,y(t) \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $V(x,y) = x - 1 - \log(x) + y - 1 - \log(y)$ ist eine Lyapunov-Funktion bei $(1,1)$.

(a) Zeigen Sie dies.
Hinweis: $2x + 2y - 2 - 2xy = -2(1-x)(1-y) \le (1-x)^2 + (1-y)^2$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Lösung mit $x(0) > 0$ und $y(0) > 0$ für $t \to \infty$ zum Gleichgewichtspunkt $(1,1)$ konvergiert.