NAME: AUFGABE 1

Bei welchen Anfangswerten $y(0)$ gilt für die Lösung von

$$y'(x) = y(x)\,(1 - y(x))^6\,,$$

dass $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$ existiert? Nach einer Formel für die Lösungen wird nicht gefragt.

NAME: AUFGABE 2

Wir betrachten $y'(x) = (x + y(x))^2$.

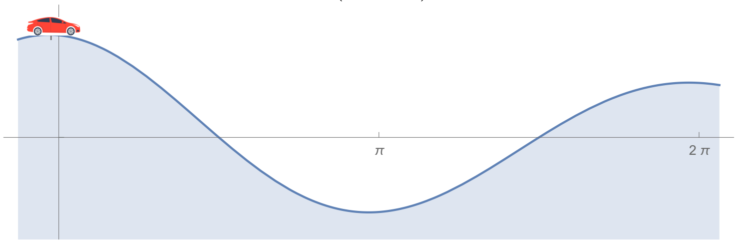
a. Welche Differentialgleichung bekommt man nach der Substitution $z(x) = y(x) + x$?

b. Berechnen Sie alle Lösungen von $y'(x) = (x + y(x))^2$ als Funktion $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit maximalem Existenzintervall.

Name:

Aufgabe 3

Ein Spielzeugauto ohne Motor und ohne Reibung steht am Anfang ($x = 0$) einer Bahn der Form $Y(x) = \frac{115}{100}\, e^{-\frac{1}{10}x} \cos x$ und wird losgelassen bei $t = 0$. Die Erhaltung der Energie liefert:



$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{konstant}.$$

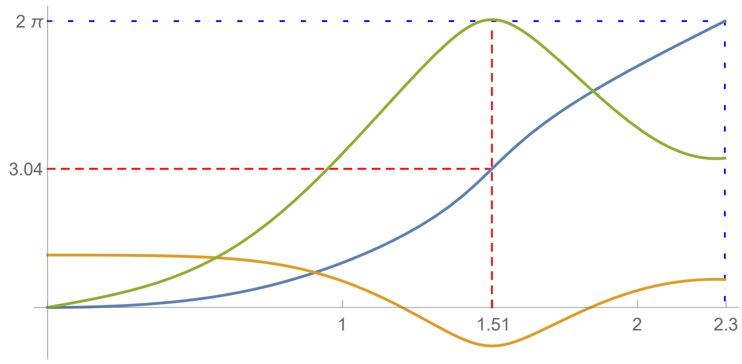
Hier ist m die Masse, v die Geschwindigkeit, h die Höhe und $g = 10$ die Gravitationskonstante. Einheiten sind Meter, Kilogramm und Sekunden.

a. Sei $(x(t), y(t)) = (x(t), Y(x(t)))$ die Position des Spielzeugs zur Zeit t. Geben Sie eine Herleitung an für das zugehörige Anfangswertproblem unter der Annahme, dass $x'(t) \geq 0$:

$$\begin{cases} \sqrt{1 + Y'(x(t))^2}\; x'(t) = \sqrt{23 - 20\, Y(x(t))} \text{ für } t > 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

b. Die Funktion $x(t) = 0$ ist eine Lösung. Begründen Sie, wieso der Satz von Picard-Lindelöf hier keine Eindeutigkeit liefern kann. Es gibt nämlich noch eine zweite Lösung.

c. Die zweite Lösung kann man numerisch approximieren und die Approximationen $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ als auch $t \mapsto v(t)$ sind hier rechts dargestellt. Geben Sie an, welche Kurve zu welcher Funktion gehört. Wie lange braucht es etwa bis zu der Stelle $\left(2\pi, \frac{115}{100}e^{-\frac{\pi}{5}}\right)$?



Name: | Aufgabe 4

Seien $M \in M^{5\times 5}(\mathbb{R})$ und $\vec{x}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$ gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & -8 & -11 \\ -1 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} - e^{-2t} \\ e^{-2t} - e^{t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} + e^{-t} - e^{t} - e^{2t} + e^{3t} \\ -e^{-2t} - e^{-t} + e^{t} + e^{2t} - e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass die Funktion $t \mapsto \vec{x}_1(t)$ eine Lösung ist von

$$\vec{x}\,'(t) = M\ \vec{x}(t)\,. \qquad (\star)$$

a. Wie kann man die Eigenwerte von M in $\vec{x}_1(t)$ ablesen?

b. Wie findet man die Eigenvektoren von M mittels $\vec{x}_1(t)$?

c. Geben Sie die allgemeine Lösung von $(\star)$ an.

Name: | Aufgabe 5

Wir betrachten die Differentialgleichung

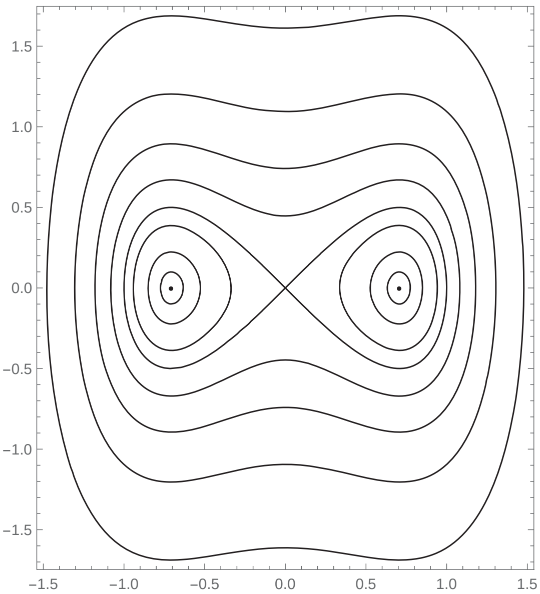
$$u''(t) = u(t) - 2u(t)^3. \qquad (\otimes)$$

a. Rechts ist die Phasenebene für $(\otimes)$ skizziert. Was stellt sie dar und wie bekommt man sie?

b. Gibt es viele periodische Lösungen von $(\otimes)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c. Berechnen Sie alle konstanten Lösungen.

d. Geben Sie Differentialgleichungen erster Ordnung an für alle sonstigen Lösungen, für die $\lim_{t\to-\infty} u(t)$ oder $\lim_{t\to\infty} u(t)$ existiert.



Name: | Aufgabe 6

Berechnen Sie eine Greensche Funktion $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ für das Randwertproblem

$$\begin{cases} -w''(t) = f(t) \text{ für } t \in (0,1), \\ w(0) = w'(1) + w(1) = 0. \end{cases}$$

Das heißt, für eine beliebige stetige Funktion f ist

$$w(t) = \int_{s=0}^{1} G(t,s) f(s)\, ds$$

die Lösung.

Name: | Aufgabe 7

Das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t)) \text{ mit } f(x,y) = \begin{pmatrix} x \sin(y-x) \\ \pi^2 - x^2 - y^2 + xy \end{pmatrix}$$

hat 6 Gleichgewichtspunkte:

$$P_1 = (\pi, 0), \quad P_2 = (\pi, \pi), \quad P_3 = (0, \pi),$$
$$P_4 = (-\pi, 0), \quad P_5 = (-\pi, -\pi), \quad P_6 = (0, -\pi).$$

a. Zeigen Sie, dass P_2 ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

b. Zeigen Sie, dass die Linearisierung bei P_3 ein neutral stabiles System ergibt.

c. Ist P_3 neutral stabil beim ursprünglichen System? Sie dürfen Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden oder auch mit Hilfe einer Skizze begründen.