NAME:	AUFGABE 1	

Berechnen Sie alle Lösungen mit dem zugehörigen maximalen Existenzintervall von

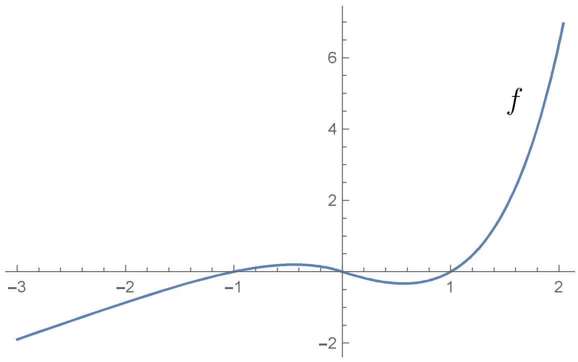
a. $u'(t) = \dfrac{t-1}{u(t)-1}$;

b. $z''(s) + 2z'(s) + 5z(s) = \sin(s)$.

NAME:	AUFGABE 2	

Wir betrachten für $f(y) = (e^y - 1)(|y| - 1)$ das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(y(x)) \text{ mit } y(0) = y_0.$$



a. Begründen Sie, dass es für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung hat.

b. Begründen Sie, dass eine Lösung mit $y_0 \in [-1, 1]$ ganz $\mathbb{R}$ als Existenzintervall hat.

c. Was kann man für das maximale Existenzintervall (T^-, T^+) folgern, wenn $y_0 > 1$?

d. Was kann man für das maximale Existenzintervall (T^-, T^+) folgern, wenn $y_0 < -1$?

Name: Aufgabe 3

Die konstante Summe von kinetischer und potentieller Energie für ein Pendel ohne Reibung liefert

$$\frac{1}{2}m\left(\ell\varphi'(t)\right)^2 - mg\ell\cos\left(\varphi(t)\right) = E_0. \tag{1}$$

Hier ist E_0 die konstante totale Energie, ℓ die Länge des Pendels, m die Masse, g die Gravitationskonstante und $t \mapsto \varphi(t)$ der Winkel bezüglich des stabilen Ruhestands.

a. Zeigen Sie, wie die übliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für ein Pendel aus dieser Formel folgt und geben Sie diese Gleichung an.

b. Umschreiben von (1) liefert:

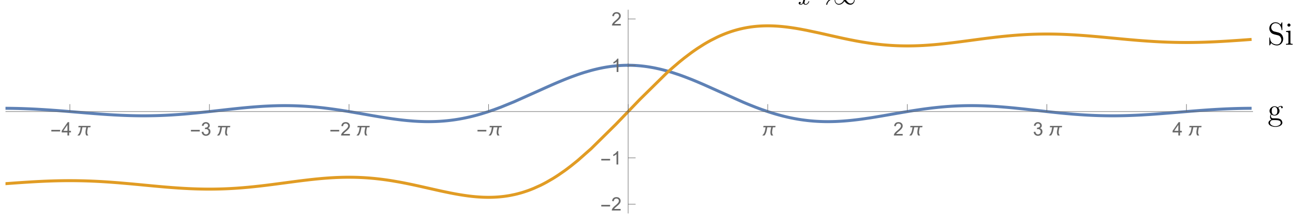
$$\varphi'(t) = \pm F\left(\varphi(t)\right) \text{ mit } F(\varphi) = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\frac{E_0}{\ell mg} - \cos(\varphi)\right)}.$$

Fixiere $E_0 \in (-\ell mg, \ell mg)$. Kann man mit dem Satz von Picard-Lindelöf begründen, dass das folgende Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat?

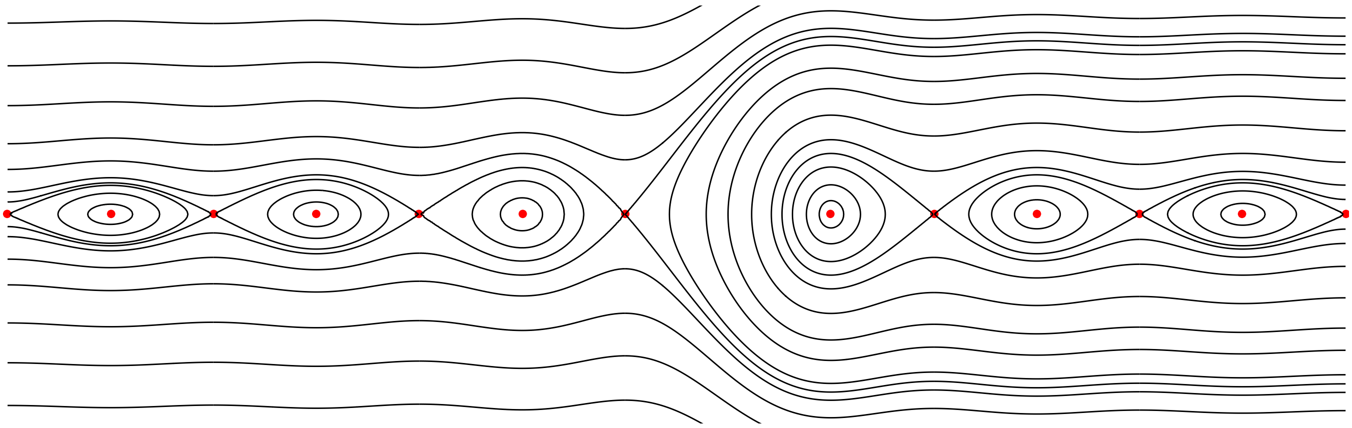
$$\begin{cases} \varphi'(t) = -F\left(\varphi(t)\right), \\ \varphi(0) = \arccos\left(\frac{E_0}{\ell mg}\right). \end{cases}$$

NAME: AUFGABE 4

Gegeben ist die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ für $x \neq 0$.
Die Funktion $\mathrm{Si} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Stammfunktion von g mit $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{Si}(x) = \frac{1}{2}\pi$.



Wir skizzieren auch die Phasenebene für die Differentialgleichung: $$u''(t) = g(u(t)). \qquad (2)$$



a. Welche konstanten Lösungen hat (2)?

b. Hat (2) (nicht-konstante) periodische Lösungen? Wenn ja, dann bitte die passenden Anfangswerte in der Phasenebene angeben.

c. Gibt es (nicht-konstante) Lösungen u mit $\lim_{t\to\infty} u(t) = c$? Für welche c?

d. Gibt es Lösungen u mit $\lim_{t\to\infty} u'(t) = c \neq 0$? Für welche c?

Name: | Aufgabe 5

Gegeben ist das System

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ mit } M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

a. Geben Sie an, wie man eine Formel für die allgemeine Lösung konstruiert.

b. Berechnen Sie die allgemeine Lösung.

Name: | Aufgabe 6

Haben die folgenden Randwertprobleme eine eindeutige Lösung?

a. $w''(x) + w(x) = 0 \quad \text{mit } w(0) = w(\pi) = 0;$

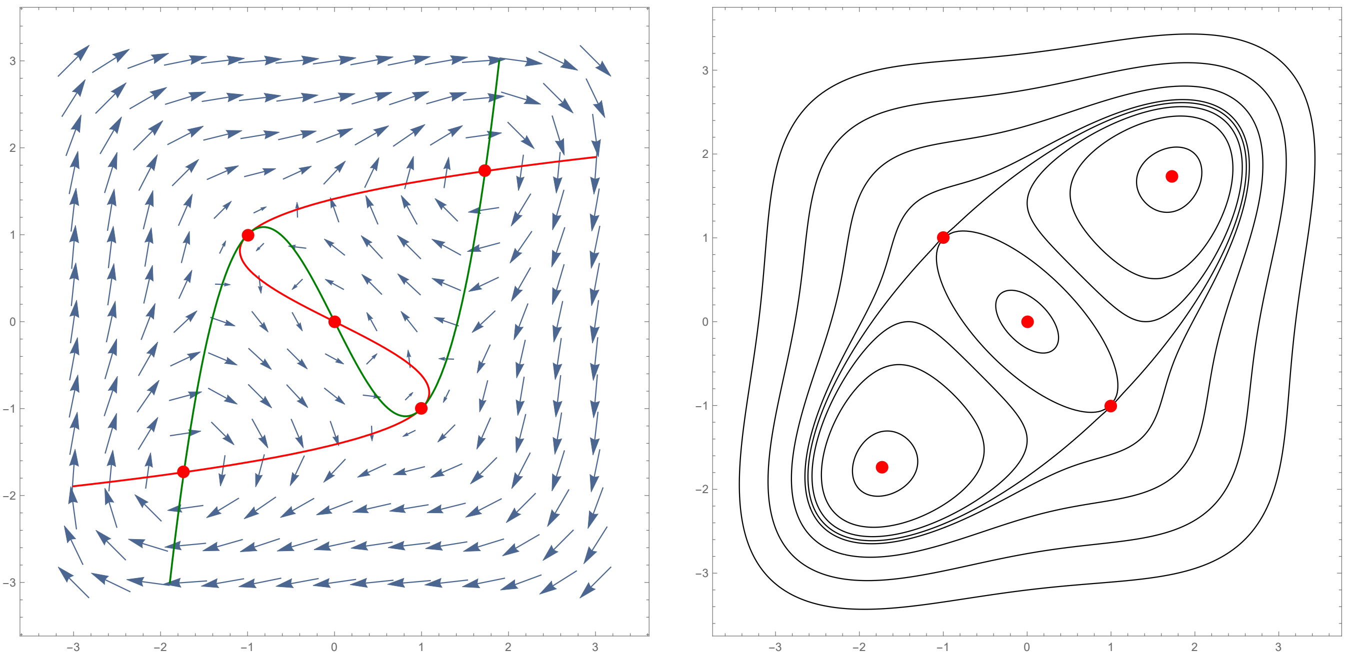
b. $v''(t) = \dfrac{2v(t)}{1 + v(t)^2} \quad \text{mit } v(0) = v(\pi) = 0.$

Name: Aufgabe 7

Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t)) \text{ mit } f(x,y) = \begin{pmatrix} -x + y\left(y^2 - 2\right) \\ y - x\left(x^2 - 2\right) \end{pmatrix}$$

und die Funktion $V(x,y) = \frac{1}{4}\left(x^4 + y^4\right) - \left(x^2 + y^2 + xy\right)$.



Links eine Skizze des Vektorfeldes f mit den Nullklinen und rechts eine Skizze der Niveaulinien von V. Das System hat 5 Gleichgewichtspunkte: $(0,0)$, $\pm(1,-1)$ und $\pm\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

a. Bei jedem dieser Gleichgewichtspunkte gilt für jeden Eigenwert: $\mathrm{Re}\lambda = 0$. Ist die Linearisierung bei $(1,-1)$ neutral stabil?

b. Zeigen Sie, dass für jede Lösung $t \mapsto (x(t), y(t))$ der Differentialgleichung gilt, dass

$$V(x(t), y(t)) = V(x(0), y(0)).$$

c. Ist $-V$ eine Lyapunov-Funktion bei $(0,0)$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

d. Nicht alle 5 Gleichgewichtspunkte sind neutral stabil. Begründen Sie, welche stabil und welche instabil sind.