1. Geben Sie jeweils alle Funktionen an, die die folgenden Anfangswertprobleme lösen.
   (a) $u'(t) = t\ u(t)^2$, $u(1) = -1$;
   (b) $x\ y'(x) = y(x) + x^2$, $y(0) = 0$.

2. (a) Geben Sie eine möglichst allgemeine Bedingung an F an dafür, dass das folgende Anfangswertproblem zweiter Ordnung mindestens eine Lösung hat, wobei diese nicht unbedingt eindeutig sein muss.

$$\begin{cases} v''(t) = F\left(t, v(t), v'(t)\right) \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

   (b) Geben Sie eine möglichst allgemeine Bedingung an F an dafür, dass dieses Anfangswertproblem genau eine Lösung hat.

3. Geben Sie die allgemeine Lösung an von

$$\begin{pmatrix} w'(t) \\ x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(t) \\ x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Hinweis:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Das System

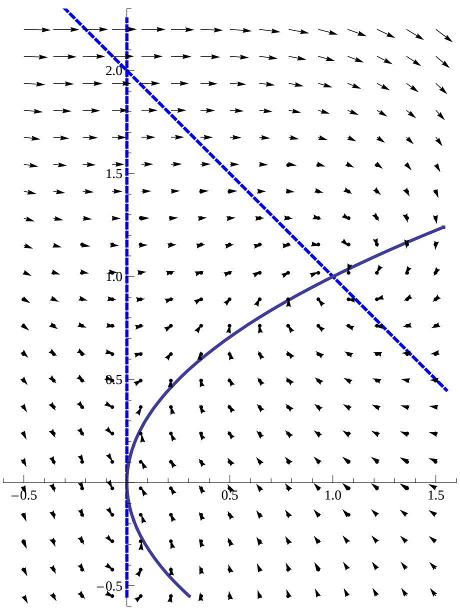
$$\begin{cases} u'(t) = v(t)^2 - u(t) \\ v'(t) = u(t)\left(2 - u(t) - v(t)\right) \end{cases}$$

hat unter anderem die zwei Gleichgewichtspunkte $(1,1)$ und $(0,0)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $(1,1)$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

   (b) Begründen Sie, warum $(0,0)$ instabil ist.

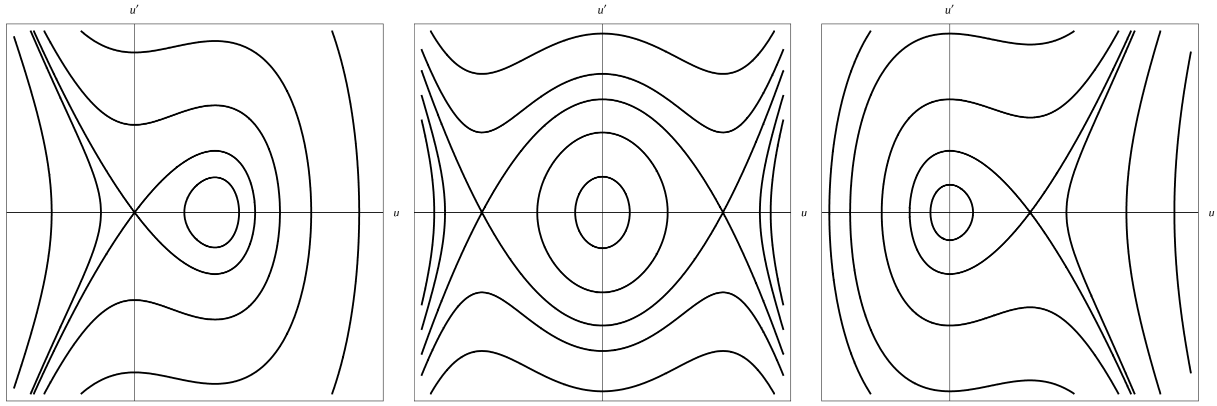
   Hinweis zu (b): Vektorfeld.



5. (a) Welches Bild zeigt die Phasenebene zu

$$u''(x) = u(x)\,(2 - 3u(x))?$$

Die Achsen schneiden sich in $(0,0)$.



(b) Für welche $u_0 \in \mathbb{R}$ hat das Anfangswertproblem mit $u(0) = u_0$ und $u'(0) = 0$ eine periodische Funktion als Lösung?

6. Sei $u : (T^-, T^+) \to \mathbb{R}$ die Lösung mit maximalem Existenzintervall von

$$\begin{cases} u'(t) = 1 + t^2 + u(t)^2, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Man möchte T^+ abschätzen und verwendet dazu

$$\begin{cases} v'(t) = 1 + v(t)^2 \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} w'(t) = 4 + w(t)^2 \\ w(0) = 0 \end{cases} .$$

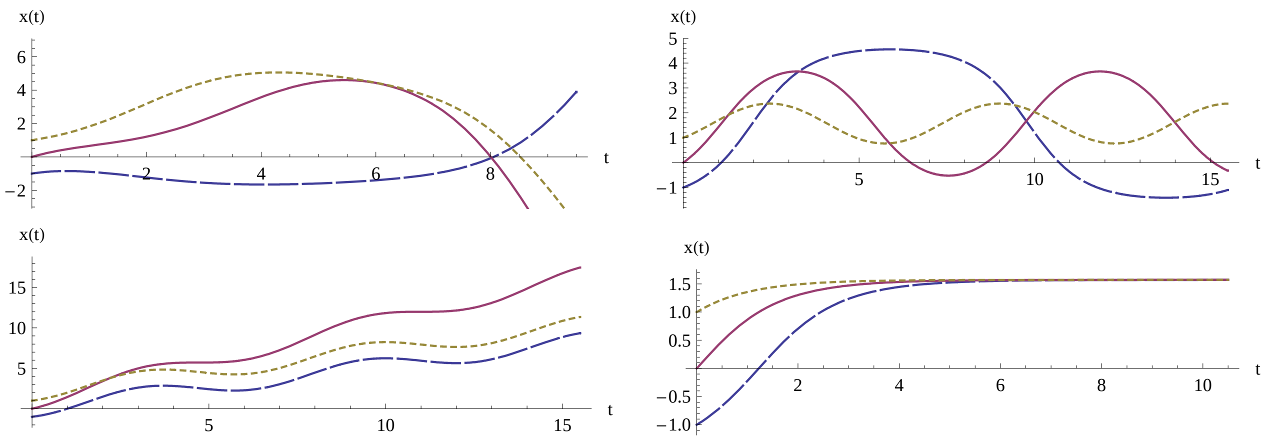
Beweisen Sie, dass $T^+ \in \left(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

7. Gegeben seien die Anfangswertprobleme

$$\text{(a)} \begin{cases} x'(t) = \cos(x(t)) \\ x(0) = c \\ x'(0) = \cos(c) \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x''(t) = \cos(x(t)) \\ x(0) = c \\ x'(0) = \cos(c) \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x'''(t) = \cos(x(t)) \\ x(0) = c \\ x'(0) = \cos(c) \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} x''(t) = \cos(t) \\ x(0) = c \\ x'(0) = \cos(c) \end{cases}$$

Im Folgenden sind Lösungen mit $c \in \{-1, 0, 1\}$ dargestellt. Welches Bild gehört zu welchem Anfangswertproblem? Begründen Sie Ihre Antworten.



8. Gegeben sei das folgende System:

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \text{ mit } F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v - u^3 - 1 \\ 1 - u^3 - v \end{pmatrix}$$

   (a) Die Linearisierung um den Gleichgewichtspunkt ist

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

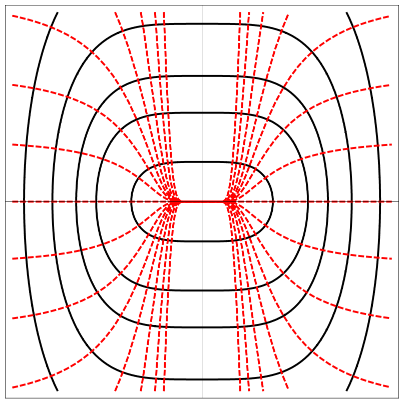
   Welche Aussage kann man auf Grund dieser Linearisierung über die Stabilität des Systems treffen?

   (b) Zeigen Sie, dass $V(u,v) = \frac{1}{2}u^4 + (v-1)^2$ eine Lyapunov-Funktion ist. Welche Aussage kann man nun über die Stabilität treffen?

   (c) Sei $t \mapsto (u^*(t), v^*(t))$ die Lösung mit $u^*(0) = v^*(0) = 4711$.
   Bestimmen Sie (ohne Beweis) $\lim\limits_{t\to\infty} (u^*(t), v^*(t))$.

9. Finden Sie eine Familie von Trajektorien, die orthogonal liegen zu

$$\left\{(x,y); y^2 + x^4 = c\right\}_{c\in\mathbb{R}}.$$



10. Erklären Sie, wie der Fixpunktsatz von Banach verwendet wird im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf.