

Klausur Gewöhnliche Dgl

WS 12/13

1. Berechnen Sie alle Lösungen von $y'''(t) + y(t) = \cos(t)$.
2. Berechnen Sie die orthogonalen Trajektorien zu $\{(x, y); y + \arctan(x) = c\}_{c \in \mathbb{R}}$.
3. Betrachte das Anfangswertproblem

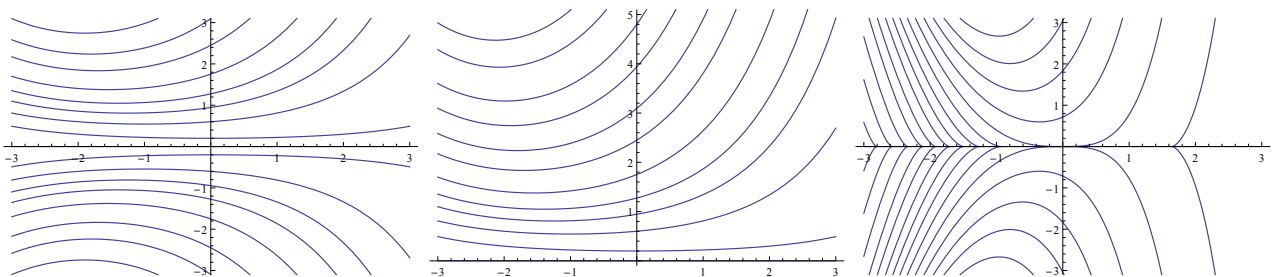
$$\begin{cases} u'(t) = 2t + \frac{2}{u(t)}, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

- (a) Wie ist die Picard-Iteration definiert für dieses Anfangswertproblem?
 - (b) Berechnen Sie eine erste und zweite Approximation mit Hilfe der Picard-Iteration.
4. Wir betrachten

$$x'(t) = 2t \sqrt[3]{x(t)} + x(t).$$

- (a) Von welchem Typ ist diese Differentialgleichung?
- (b) Erfüllt diese Differentialgleichung die Lipschitz-Bedingung?
- (c) Berechnen Sie alle Lösungen mit $x(0) = 1$.
- (d) Welche der drei Skizzen gibt ein gutes Bild aller Lösungen?

Antworten bitte mit Begründung.



5. Sei M eine reelle 4×4 -Matrix. Die Lösungen von

$$\vec{x}'(t) = M \vec{x}(t) \text{ mit } M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Leider hat jemand mit Tinte gekleckert.

- (a) Welche Eigenwerte hat M ?
- (b) Ergänzen Sie M .
- (c) Ergänzen Sie den verdeckten Teil der Lösung.

Geben Sie klar Ihre Gründe an.

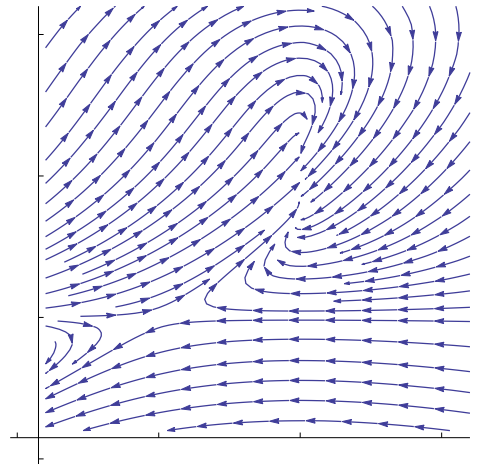
6. Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} y^3 - 3y^2 + 3y - x \\ (1-x)y \end{pmatrix}$$

und betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t)).$$

Die Gleichgewichtspunkte sind $(1, 1)$ und $(0, 0)$.
Eine Skizze des Vektorfeldes steht nebenan.



- (a) Zeigen Sie, dass es keine weiteren Gleichgewichtspunkte gibt.
- (b) Geben Sie die beiden zugehörigen linearisierten Systeme an.
- (c) Klassifizieren Sie diese linearisierten Systeme (Stabilität und wenn möglich Typ).
- (d) Kann man aus diesen linearisierten Systemen etwas folgern für die Stabilität des Originalsystem bei den Gleichgewichtspunkten?

Begründen Sie Ihre Antworten.

7. Wir betrachten nochmals

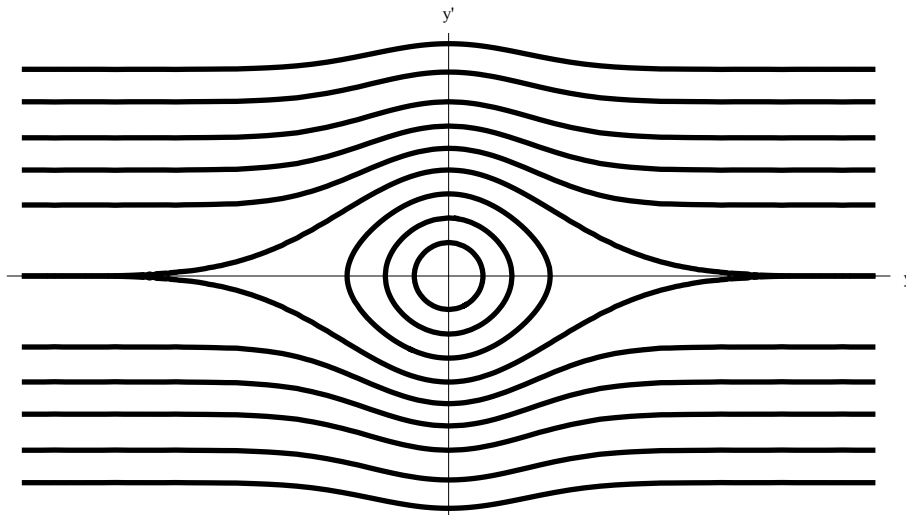
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t)) \text{ mit } f(x, y) = \begin{pmatrix} y^3 - 3y^2 + 3y - x \\ (1-x)y \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $V(x, y) = 2(x-1)^2 + (y-1)^4 - 4(x-1)(y-1)^3$ ist eine Lyapunov-Funktion bei $(1, 1)$. Dies müssen Sie nicht zeigen. Beantworten Sie jedoch die folgenden Fragen.

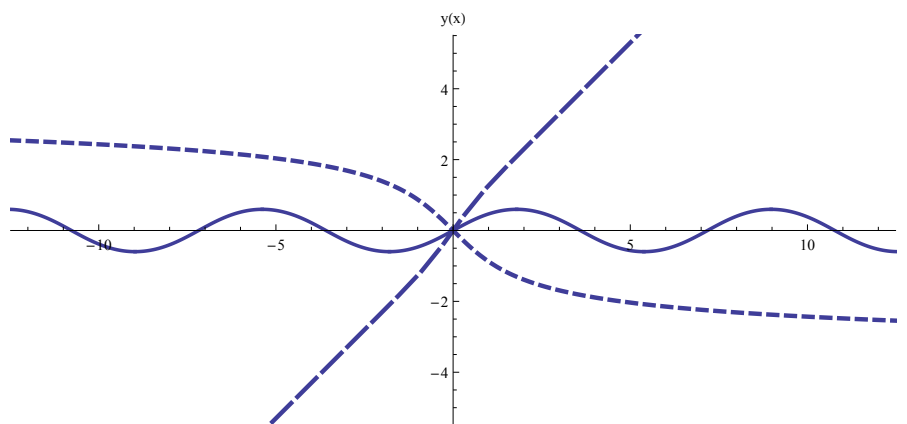
- (a) Was bedeutet dies für das System beim Gleichgewichtspunkt $(1, 1)$?

- (b) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit diese Funktion V eine Lyapunov-Funktion bei $(1, 1)$ ist? Schreiben Sie die Ungleichungen explizit hin.
- (c) Ist V eine globale Lyapunov-Funktion?

8. Es folgt eine Skizze der Phasenebene zu $y''(x) = -y(x) e^{-y(x)^2}$.



- (a) Berechnen Sie die Gleichungen zu den Kurven in der Phasenebene.
- (b) Das nächste Bild gibt Skizzen dreier Lösungen. Beschreiben oder zeichnen Sie die zugehörigen Kurven in der Phasenebene.



9. Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} u'(t) = -e^{-t^2} - \frac{1}{u(t)}, \\ u(0) = a \neq 0. \end{cases}$$

Das maximale Existenzintervall für die von a abhängige Lösung u_a nennen wir (T_a^-, T_a^+) . Hier unten steht die Skizze einiger Lösungen der Differentialgleichung mit den Hilfskurven $u = -e^{t^2}$ und $u = 0$.

(a) Was bedeuten diese Hilfskurven?

Weiter gilt $a > 0$:

(b) Zeigen Sie, dass $T_a^- = -\infty$.

(c) Zeigen Sie, dass $T_a^+ < \infty$.

(d) Zeigen Sie, dass $\lim_{t \uparrow T_a^+} u_a(t) = 0$.

Sei nun $a = 1$:

(e) Zeigen Sie, dass $T_1^+ \in (0, \frac{1}{2}]$.

