

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 9

## Lotka, Volterra und Lyapunov



### 9.1 Anwendungen in der Populationsdynamik

Wenn man zwei zusammenlebende Lebensformen betrachtet, die durch ihre Anwesenheit Einfluss auf die Größe der gegenseitigen Populationen nehmen, modelliert man solche Probleme oft durch quadratische Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} x'(t) = R_1(x(t), y(t)) x(t), \\ y'(t) = R_2(x(t), y(t)) y(t). \end{cases}$$

Es hängt von  $R_1, R_2$  ab, welcher Typ beschrieben wird mit dem System. Wir stellen einige Möglichkeiten vor.

#### 9.1.1 Das Räuber-Beute oder Lotka-Volterra Modell

In der englisch-sprachigen Literatur ist dieses Lotka-Volterra<sup>1</sup> Modell bekannt unter dem Namen „predator-prey“. Die Zahl der Räuber (z.B. Mäusebussarde) wird durch  $x$  beschrieben. Ohne Anwesenheit von Beute sterben sie aus mit Rate  $\alpha$ . Wenn es Beute (Nagetiere) gibt, deren Zahl durch  $y$  beschrieben wird, kommt ein Term  $\beta y$  für den Zuwachs dazu. Dies liefert die Differentialgleichung  $x'(t) = (-\alpha + \beta y(t)) x(t)$ . Nun betrachten wir die Beute. Diese Beute hat einen natürlichen Zuwachs mit Rate  $\gamma$  und wird reduziert durch die anwesenden Räuber mit Faktor  $\beta$ . Die Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  sind positiv. Das bringt uns auf

$$\begin{cases} x'(t) = (-\alpha + \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma - \delta x(t)) y(t). \end{cases} \quad (9.1)$$

Weil die rechte Seite als Funktion von  $(x, y)$  differenzierbar ist, hat dieses System für jeden Anfangswert  $(x(0), y(0))$  eine eindeutige Lösung. Das bedeutet auch, dass wenn  $x(t) \neq 0$  für ein  $t \in \mathbb{R}$  gilt,  $x(t) \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Ähnliches gilt für  $y$ .

Der nichttriviale Gleichgewichtspunkt ist

$$(x, y) = \left( \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

---

<sup>1</sup>Volterra war ein italienischer Mathematiker, der diese Modelle studiert hat in *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* (1931, Lektionen über die mathematische Theorie über den Kampf ums Leben). Aufgefordert dazu wurde er von seinem Schwiegersohn, der als Biologe den Fischbestand im adriatischen Meer während und nach dem ersten Weltkrieg studierte. Lotka war ein amerikanischer Biologe, der unabhängig zu ähnlichen Modellen kam.

Linearisiert man bei diesem Punkt, findet man

$$\nabla f \left( \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\beta/\delta \\ -\alpha\delta/\beta & 0 \end{pmatrix}$$

und das ist ein Zentrum. Weil  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  kann man keine sofortige Aussage machen zu der Stabilität oder zum Bild der Trajektorien. Auch Theorem 8.7 ist nicht anwendbar.

**Lemma 9.1** *Seien  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$ . Dann sind die Trajektorien von (9.1) in  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , außer dem Gleichgewichtspunkt, geschlossene Kurven. Die dazugehörigen Lösungen sind periodisch.*

**Beweis.** Wir dürfen annehmen, dass  $x \neq 0$  und  $y \neq 0$ . Sei  $t \mapsto (x(t), y(t))$  eine Lösung in  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Dann hat man

$$\left( \frac{\gamma}{x(t)} - \delta \right) x'(t) = \frac{x'(t)y'(t)}{x(t)y(t)} = \left( \frac{-\alpha}{y(t)} + \beta \right) y'(t)$$

und es folgt, dass es eine Konstante gibt derart, dass

$$\gamma \ln(x(t)) - \delta x(t) = -\alpha \ln(y(t)) + \beta y(t) + c.$$

Anders gesagt, die Trajektorien  $\{(x(t), y(t)); t \in (t_-, t_+)\}$  sind Niveaumengen der Funktion

$$F(x, y) = \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y).$$

Diese Niveaumengen sind konvexe beschränkte Kurven, weil  $x \mapsto F(x, y)$  und  $y \mapsto F(x, y)$  konvex sind und weil  $F(x, y) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \downarrow 0$ ,  $y \rightarrow \infty$ , und für  $y \downarrow 0$ . Dann bleiben nur geschlossene Kurven übrig. Da kein Gleichgewichtspunkt (als Grenzwert) auf so einer Kurve liegt, ist die Lösung sogar periodisch. ■

**Lemma 9.2** *Seien  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$ . Für die Durchschnittswerte einer Lösung von (9.1) in  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  gilt:*

$$\bar{x} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ und } \bar{y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

**Beweis.** Sei  $T$  die Periode einer Lösung. Der Durchschnittswert ist definiert durch

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

Wenn wir die zweite Differentialgleichung benutzen, finden wir

$$x(t) = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{y'(t)}{\delta y(t)}$$

und es folgt

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\gamma}{\delta} - \frac{y'(t)}{\delta y(t)} \right) dt = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{T\delta} (\ln(y(T)) - \ln(y(0))) = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Ähnlich folgt das Ergebnis für  $\bar{y}$ . ■

Wenn es keine Räuber gibt, wächst die Größe der Beute exponentiell zu  $\infty$ . Ein derartiges Modell ist nicht besonders glaubwürdig. Um diesem unnatürlichen Verhalten vorzuzukommen, wird dieses Räuber-Beute Modell wie folgt geändert:

$$\begin{cases} x'(t) = (-\alpha - c_1 x(t) + \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma - c_2 y(t) - \delta x(t)) y(t). \end{cases}$$

Auch  $c_1$  und  $c_2$  sind positiv.

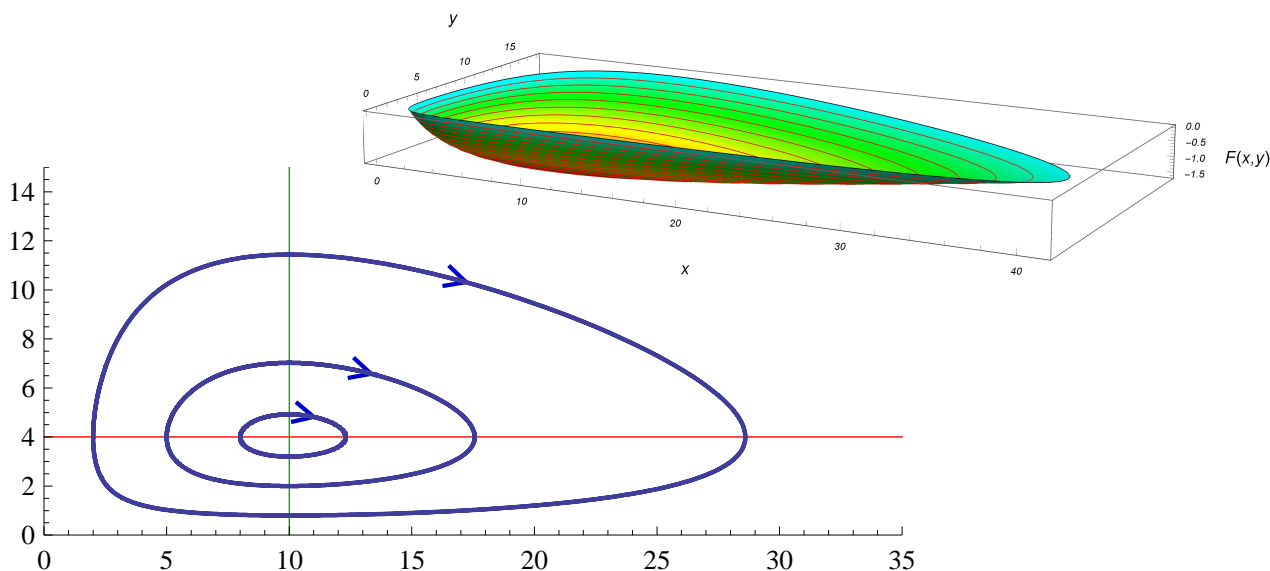


Abbildung 9.1: Für  $f$  aus Beispiel 9.3 oben eine Skizze zu  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  mit einige Niveaulinien. Im unteren Bild die Skizze einiger Trajektorien für 9.2. Trajektorien laufen über Niveaulinien.

**Beispiel 9.3** Wir betrachten

$$\begin{cases} x'(t) = \left(-1 + \frac{1}{4}y(t)\right) x(t), \\ y'(t) = \left(1 - \frac{1}{10}x(t)\right) y(t). \end{cases} \quad (9.2)$$

Die Gleichgewichtspunkte sind  $(0, 0)$  und  $(10, 4)$ . Linearisieren um  $(10, 4)$  liefert die neutral stabile Linearisierung

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Dies liefert jedoch nicht unbedingt die Stabilität rund  $(10, 4)$  für (9.2). Dazu betrachten wir  $f(x, y) = -\ln(y) + \frac{1}{4}y - \ln(x) + \frac{1}{10}x$ . Man berechnet direkt, dass für eine Lösung  $t \mapsto (x(t), y(t))$  folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \\ &= \left(-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{10}\right) x'(t) + \left(-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{4}\right) y'(t) = 0. \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung verwendet man (9.2). So folgt, dass für eine Lösung gilt

$$f(x(t), y(t)) = f(x(0), y(0)).$$

Die Lösungskurven sind Niveaumengen von  $f$ . Siehe Abbildung 9.1 auf Seite 95.

### 9.1.2 Das kooperative Modell oder Mutualismus

Man betrachtet zwei Spezies  $x$  und  $y$ , die gegenseitig von ihrer Anwesenheit profitieren:

$$\begin{cases} x'(t) = (\alpha + \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma + \delta x(t)) y(t). \end{cases}$$

Ist man auch hier besorgt über die Überbevölkerung, kann man das System wiederum ändern in

$$\begin{cases} x'(t) = (\alpha + \beta y(t) - c_1 x(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma + \delta x(t) - c_2 y(t)) y(t). \end{cases}$$

Nicht jedes Paar positiver Konstanten  $c_1, c_2$  sorgt für beschränkte Lösungen.

### 9.1.3 Das Wettbewerbsmodell

Zwei verschiedene Arten, die beide um die gleichen Ressourcen kämpfen müssen, werden modelliert durch

$$\begin{cases} x'(t) = (\alpha - c_1 x(t) - \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma - c_2 y(t) - \delta x(t)) y(t). \end{cases}$$

Es hängt von den Konstanten ab, ob beide Populationen gleichzeitig überleben können.

**Beispiel 9.4** Wir betrachten

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - 2x(t) - y(t)) x(t), \\ y'(t) = (2 - x(t) - 2y(t)) y(t). \end{cases}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind  $(0, 0)$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$ . Man findet

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 4x - y & -x \\ -y & 2 - x - 4y \end{pmatrix}$$

und:

Ggp.:	$(0, 0)$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(1, 0)$	$(0, 1)$
Matrix:	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
Eigenwerte:	2, 2	$-\frac{2}{3}, -2$	-2, 1	-2, 1
Stabilität:	instabil	as. stabil	instabil	instabil

Man kann zeigen, dass die Lösung mit  $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  zu  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ . Die beiden Spezien können nebeneinander existieren.

**Beispiel 9.5** Wir betrachten

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - x(t) - 2y(t)) x(t), \\ y'(t) = (2 - 2x(t) - y(t)) y(t). \end{cases}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind  $(0, 0)$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $(2, 0)$  und  $(0, 2)$ . Man findet

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2x - 2y & -2x \\ -2y & 2 - 2x - 2y \end{pmatrix}$$

und:

Ggp.:	$(0, 0)$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(2, 0)$	$(0, 2)$
Matrix:	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$
Eigenwerte:	2, 2	$\frac{2}{3}, -2$	-2, -2	-2, -2
Stabilität:	instabil	instabil	as. stabil	as. stabil

Man kann zeigen, dass die Lösung mit  $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  und  $x(0) > y(0)$  zu  $(2, 0)$  konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ . Wenn  $x(0) < y(0)$  folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 2)$ .

Beide Arten können nicht nebeneinander überleben.

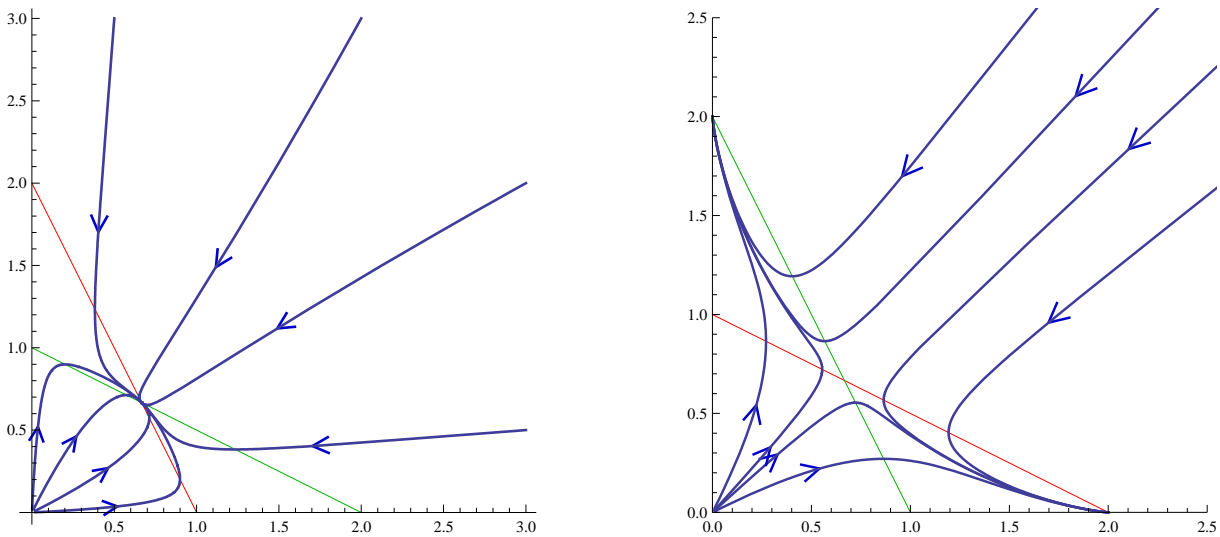


Abbildung 9.2: Skizze einiger Trajektorien aus den letzten Beispielen.

## 9.2 Lyapunov

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes Gebiet. Wir betrachten wiederum für eine  $C^1$ -Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  das System

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (9.3)$$

und nehmen an  $x_p \in \Omega$  ist ein Gleichgewichtspunkt.

**Definition 9.6** Sei  $U$  eine Umgebung von  $x_p$ . Die  $C^1$ -Funktion  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine Lyapunov-Funktion für (9.3) beim Gleichgewichtspunkt  $x_p$ , wenn

1.  $V(x_p) = 0$ ;
2.  $V(x) > 0$  für  $x \in U \setminus \{x_p\}$ ;
3.  $\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$  für  $x \in U$ .

**Bemerkung 9.6.1** Die Notation  $\dot{V}$  ist eigentlich eigenartig, denn in ihr steckt das Vektorfeld  $f$ . Der Punkt steht für die Richtungsableitung von  $V$  in der Richtung des Vektorfeldes  $f$  und so wäre  $\frac{\partial V}{\partial f}$  also eine bessere Notation. Diese wird jedoch nicht verwendet.

**Theorem 9.7** Sei  $x_p$  ein Gleichgewichtspunkt für (9.3) und sei  $V$  eine Lyapunov-Funktion für (9.3) bei  $x_p$ .

- Dann ist  $x_p$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt.
- Wenn  $\dot{V}(x) < 0$  für  $x \in U \setminus \{x_p\}$ , dann ist  $x_p$  sogar asymptotisch stabil.

**Beweis.** Sei  $t \mapsto x(t)$  für  $t \in [0, t_+)$  eine Lösung von (9.3) mit  $t_+$  maximal. Wenn  $\dot{V}(x) \leq 0$  für  $x \in U$ , dann gilt für  $t \in [0, t_+)$ , dass

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \leq 0$$

und für  $t \in [0, t_+)$  gilt

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} V(x(s)) \, ds \leq 0.$$

Außerdem gilt  $t_+ = \infty$  oder  $\lim_{t \rightarrow t_+} u(t) \in \partial U$  oder  $\lim_{t \rightarrow t_+} |u(t)| = \infty$ .

1) Die Stabilität. Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir müssen zeigen, dass es  $\delta > 0$  gibt mit folgender Eigenschaft:

Wenn  $x(0) \in B_\delta(x_p)$ , dann folgt  $x(t) \in B_\varepsilon(x_p)$  für alle  $t > 0$ .

Sei  $K$  eine kompakte Menge in  $U$  mit  $x_p \in K \subset U^\circ$ . Wir dürfen annehmen, dass  $\varepsilon$  genügend klein ist, so dass  $B_{2\varepsilon}(x_p) \subset K$ . Definiere

$$c_\varepsilon = \inf \{V(x); x \in K \setminus B_\varepsilon(x_p)\}.$$

Weil  $K \setminus B_\delta(x_p)$  kompakt ist, und weil  $V(x) > 0$  für  $x \in U \setminus \{x_p\}$  folgt  $c_\varepsilon > 0$ . Weil  $V$  stetig ist und  $V(x_p) = 0$ , gibt es  $\delta > 0$  derart, dass  $V(x) < c_\varepsilon$  für  $x \in B_\delta(x_p)$ . Nehmen wir  $x(0) \in B_\delta(x_p)$ , dann folgt aus  $V(x(t)) \leq V(x(0)) < c_\varepsilon$ , dass  $x(t) \in B_\varepsilon(x_p)$  für  $t \in [0, t_+)$ , also auch, dass  $t_+ = \infty$ .

2) Die asymptotische Stabilität. Wegen des ersten Teils des Beweises wissen wir schon, dass  $x_p$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist. Auch wissen wir, dass  $t \mapsto V(x(t))$  eine fallende Funktion ist, die nach unten durch 0 beschränkt ist. Dann existiert  $\ell := \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t))$ . Wenn  $\ell > 0$ , dann gilt  $V(x(t)) \geq \ell$  für alle  $t > 0$ . Wegen der Stetigkeit von  $V$  gibt es  $\delta > 0$  derart, dass für  $|x - x_p| < \delta$  folgt  $V(x) < \ell$ . So haben wir gefunden, dass  $|x(t) - x_p| \geq \delta$  für alle  $t \in [0, \infty)$ . Weil  $V \in C^1$  und  $f$  stetig ist, ist  $\dot{V}$  stetig und mit der Kompaktheit von  $K \setminus B_\delta(x_p)$  folgt

$$d_\delta = \sup \left\{ \dot{V}(x); x \in K \setminus B_\delta(x_p) \right\} < 0$$

und so auch

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} V(x(s)) \, ds \leq d_\delta t \rightarrow -\infty \text{ für } t \rightarrow \infty,$$

ein Widerspruch. ■

**Bemerkung 9.7.1** Betrachte

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (9.4)$$

für  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  mit  $x_p \in \Omega$  ein Gleichgewichtspunkt. Sei  $U \subset \Omega$  eine offene Umgebung von  $x_p$  und sei  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lyapunov-Funktion mit  $\dot{V}(x) < 0$  für alle  $x \in U \setminus \{x_p\}$ . Definieren wir für  $c \in \mathbb{R}^+$  die Umgebung  $U_c$  von  $x_p$  durch

$$U_c = \{x; V(x) < c\}$$

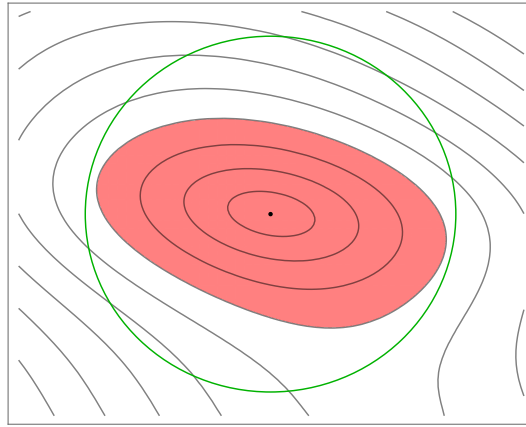


Abbildung 9.3: Seien  $f$ ,  $U$  und  $V$  als in Bemerkung 9.7.1. Die schwarzen Kurven stellen die Niveaulinien der Lyapunov-Funktion  $V$  vor mit dem Punkt  $x_p$  im Zentrum. Die Umgebung  $U$  hat den grünen Kreis als Rand. Liegt  $x_0$  im rosa Gebiet, dann existiert  $x(t)$  für  $t \in [0, \infty)$  und gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p$ .

und  $\overline{U_c} \subset U$ , dann folgt für jedes  $x_0 \in U_c$ , dass für die Lösung von (9.4) gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p.$$

Siehe Abbildung 9.3. Dieses Ergebnis findet man, wenn man sich den Beweis von Theorem 9.7 sorgfältig anschaut.

**Beispiel 9.8** Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t)^3 + x(t)y(t)^2 \\ -y(t)^3 - x(t)^2y(t) \end{pmatrix}.$$

Für Gleichgewichtspunkte gilt  $-x^3 + xy^2 = 0$  und  $-y^3 - x^2y = 0$ . Das führt via  $x(y-x)(y+x) = 0$  und  $y(x^2 + y^2) = 0$  zu  $(0, 0)$ . Die Linearisierung gibt keine Auskünfte bezüglich Stabilität oder Instabilität. Wir versuchen die Standard-Lyapunov-Funktion:

$$V(x, y) = |(x, y) - (0, 0)|^2.$$

Man sieht sofort, dass  $V(0, 0) = 0$  und  $V(x, y) > 0$  für  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Es gilt weiter, dass

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x^3 + xy^2 \\ -y^3 - x^2y \end{pmatrix} = -2x^4 + 2x^2y^2 - 2y^4 - 2x^2y^2 = \\ &= -2x^4 - 2y^4 < 0 \text{ für } (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Also ist  $(0, 0)$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

Weil dieses Argument sogar global ist, finden wir, dass jede Lösung zum Gleichgewichtspunkt konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ .

Man kann sogar die „Konvergenzgeschwindigkeit“ abschätzen. Weil

$$2x^4 + 2y^4 \geq x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

gilt, finden wir  $\dot{V}(x, y) \leq -V(x, y)^2$ . Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x(t), y(t)) \leq -V(x(t), y(t))^2$$

und via

$$\frac{-1}{V(x(t), y(t))} - \frac{-1}{V(x(0), y(0))} = \int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial s} V(x(s), y(s))}{V(x(s), y(s))^2} ds \leq \int_0^t -1 ds = -t$$

finden wir

$$\frac{1}{V(x(t), y(t))} \geq \frac{1}{V(x(0), y(0))} + t$$

und

$$x(t)^2 + y(t)^2 = V(x(t), y(t)) \leq \frac{1}{\frac{1}{V(x(0), y(0))} + t} < \frac{1}{t}.$$

Diese letzte Abschätzung gilt für jeden Anfangswert!

**Definition 9.9** Wenn jede Lösung von  $x'(t) = f(x(t))$  zum Gleichgewichtspunkt  $x_p$  konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ , dann nennt man  $x_p$  global asymptotisch stabil.

**Beispiel 9.10** Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{2}v - \sin(u) \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Die Gleichgewichtspunkte sind  $(k\pi, 0)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und wenn man da linearisiert, findet man

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Für  $k$  gerade folgt  $\lambda = -\frac{1}{4} \pm i\frac{1}{4}\sqrt{15}$  und für  $k$  ungerade  $\lambda = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{17}$ . Nur für gerade  $k$  hat man also stabile Gleichgewichtspunkte. Dies zeigt aber noch nicht, wie groß das Einzugsgebiet bei so einem Gleichgewichtspunkt ist. Betrachten wir die Funktion

$$V(u, v) = 1 - \cos(u) + \frac{1}{2}v^2.$$

Sei  $m \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $V(u, v) > 0$  für alle  $(u, v) \neq (2m\pi, 0)$  und  $V(2m\pi, 0) = 0$ . Weiter finden wir, dass

$$\begin{aligned} \dot{V}(u, v) &= \nabla V(u, v) \cdot F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(u) \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{2}v - \sin(u) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}v^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Schaut man sich die Niveaumengen von  $V$  an, dann sieht man, dass alle Kurven mit Anfangswerten in

$$D_m = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } |x - 2m\pi| < \pi \text{ und } |y| \leq 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \right\}$$

für  $t \rightarrow \infty$  nach  $(2m\pi, 0)$  konvergieren. Auf  $D_m$  ist  $V$  eine Lyapunov-Funktion für (9.5) beim Gleichgewichtspunkt  $(2m\pi, 0)$ . In Abbildung 9.4 sind die  $D_m$  in grün dargestellt.



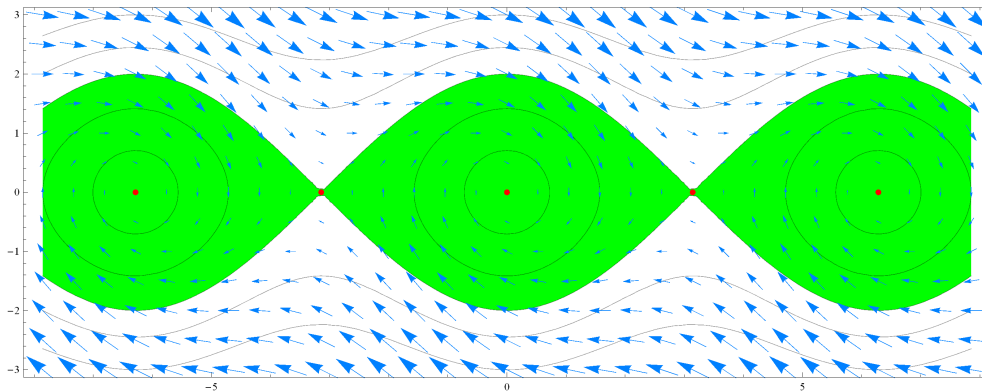


Abbildung 9.4: Die Kurven sind Niveaumengen von  $V$ ; in grün Einzugsgebiete für die stabilen Gleichgewichtspunkte. Die Vektoren gehören zum Vectorfeld  $F$ .

### 9.3 Systeme in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Für autonome Differentialgleichungssysteme  $x'(t) = f(x(t))$  in  $\mathbb{R}^2$  mit  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  haben wir die folgenden Lösungstypen gesehen.

- Lösungen, die nach  $\infty$  abhauen. Genauer gesagt  $x : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\lim_{t \uparrow t_+} |x(t)| = \infty$ . Es ist dabei möglich, dass  $t_+ = \infty$ .
- Konstante Lösungen. Das heißt  $x(t) = x_p$  für  $t \in \mathbb{R}$  mit  $x_p$  einem Gleichgewichtspunkt.
- Lösungen, die nach einem Gleichgewichtspunkt konvergieren, also  $x : (t_-, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p$ .
- Periodische Lösungen:  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $x(t+T) = x(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$ .
- Auch gibt es möglicherweise Lösungen, die zu einer periodischen Lösung konvergieren.

Ähnliches Verhalten kann man für  $t \downarrow t_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  unterscheiden. Mehr Typen gibt es nicht in  $\mathbb{R}^2$ . In einer Vorlesung „Dynamische Systeme“ wird man mehr erfahren.

**Beispiel 9.11** Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - x(t)^2 - y(t)^2)x(t) - y(t) \\ (1 - x(t)^2 - y(t)^2)y(t) + x(t) \end{pmatrix}.$$

Als einzigen Gleichgewichtspunkt finden wir  $(x, y) = (0, 0)$ . Das zugehörige linearisierte System ist

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

und ergibt einen instabilen Strudel.

Mit Hilfe von einer Substitution kann man die Lösungen des ursprünglichen Systems explizit berechnen. Für  $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$  findet man die Differentialgleichung

$$r'(t) = 2(x(t)^2 + y(t)^2)^{-1/2} (x(t)x'(t) + y(t)y'(t)) = 2(1 - r(t)^2)r(t)$$

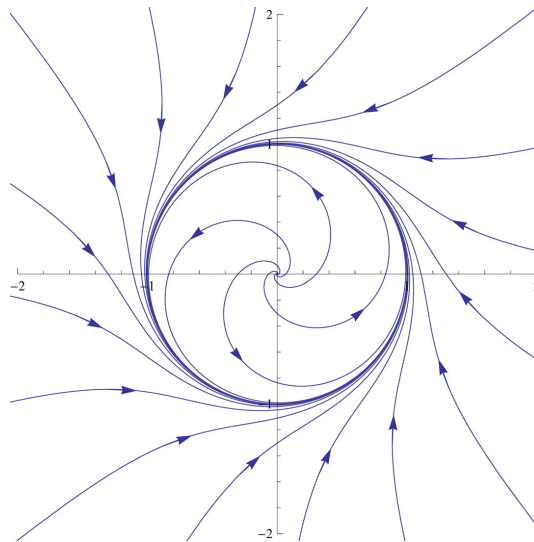


Abbildung 9.5: Skizze einiger Trajektorien aus Beispiel 9.11.

und die lässt sich explizit lösen:  $r(t) = (1 + c_1 e^{-2t})^{-1/2}$  mit  $c_1 \in \mathbb{R}$ . Mit Polarkoordinaten,

$$x(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t) \sin(\varphi(t))$$

folgt

$$\begin{aligned} x'(t) &= r'(t) \cos(\varphi(t)) - r(t) \sin(\varphi(t)) \varphi'(t), \\ y'(t) &= r'(t) \sin(\varphi(t)) + r(t) \cos(\varphi(t)) \varphi'(t). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Die Differentialgleichung liefert

$$y(t) x'(t) - x(t) y'(t) = -y(t)^2 - x(t)^2 = -r(t)^2;$$

die Gleichungen in (9.6) liefern

$$y(t) x'(t) - x(t) y'(t) = -r(t)^2 \varphi'(t).$$

Es folgt, dass  $\varphi'(t) = 1$  und  $\varphi(t) = t + c_2$ .

Anfang der sechziger Jahre hat Edward Lorenz für eine Überraschung gesorgt, als er ein Beispiel eines Differentialgleichungssystems in  $\mathbb{R}^3$  brachte mit einem wesentlich anderen Verhalten. Das nach ihm benannte System ist wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(y-x) \\ cx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}.$$

Die Konstanten  $a, b, c$  wählt man in  $\mathbb{R}^+$ . Dieses System kam auf, als er ein Modell für Strömungen in der Erdatmosphäre vereinfachte.

Für  $c \leq 1$  gibt es nur einen Gleichgewichtspunkt, nämlich  $(0, 0, 0)$  und dieser ist asymptotisch stabil. Es gilt

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser letzten Matrix sind

$$-b \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}(a+1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2 - 4(1-c)}. \quad (9.7)$$

Sie sind negativ für  $c < 1$ .

Für  $c > 1$  sind die Gleichgewichtspunkte (mit  $d = \sqrt{b(c-1)}$ ) wie folgt:

Ggp:	$(0, 0, 0)$	$(d, d, c - 1)$	$(-d, -d, c - 1)$
Matrix:	$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & -d \\ d & d & -b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & -d \\ -d & -d & -b \end{pmatrix}$
Eigenw. <sup>2</sup> :	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2, \lambda_3$	$\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3}?$	$\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3}?$
	instabil	$a, b, c$ -bedingt	instabil

Für  $a = 3$ ,  $b = 1$  und  $c = 25$  findet man eine Skizze einer Lösung in Abbildung 9.6. Die Tabelle wird

Ggp:	$(0, 0, 0)$	$(\sqrt{24}, \sqrt{24}, 24)$	$(-\sqrt{24}, -\sqrt{24}, 24)$
Eigenw.:	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2, \lambda_3$	$\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} = \nu \pm i\mu$	$\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} = \nu \pm i\mu$
	instabil	$\nu > 0 \Rightarrow$ instabil	instabil, $\nu < 0$

Die Lösung ist beschränkt aber konvergiert weder zu einem Gleichgewichtspunkt noch zu einer periodischen Lösung. Ein System mit derartigen Lösungen nennt man chaotisch.

---

<sup>2</sup>Die Eigenwerte der ersten Matrix sind wie in (9.7). Einer ist jetzt positiv. Die Eigenwerte der zweiten Matrix sind Nullstellen von  $2ad^3/b + (b + ab + d^3/b)x + (1 + a + b)x^2 + x^3$ . Die Eigenwerte der dritten Matrix sind Nullstellen von  $-2ad^3/b + (b + ab - d^3/b)x + (1 + a + b)x^2 + x^3$ . Der Zwischenwertsatz liefert für diese Polynome mindestens eine negative, beziehungsweise positive Nullstelle.

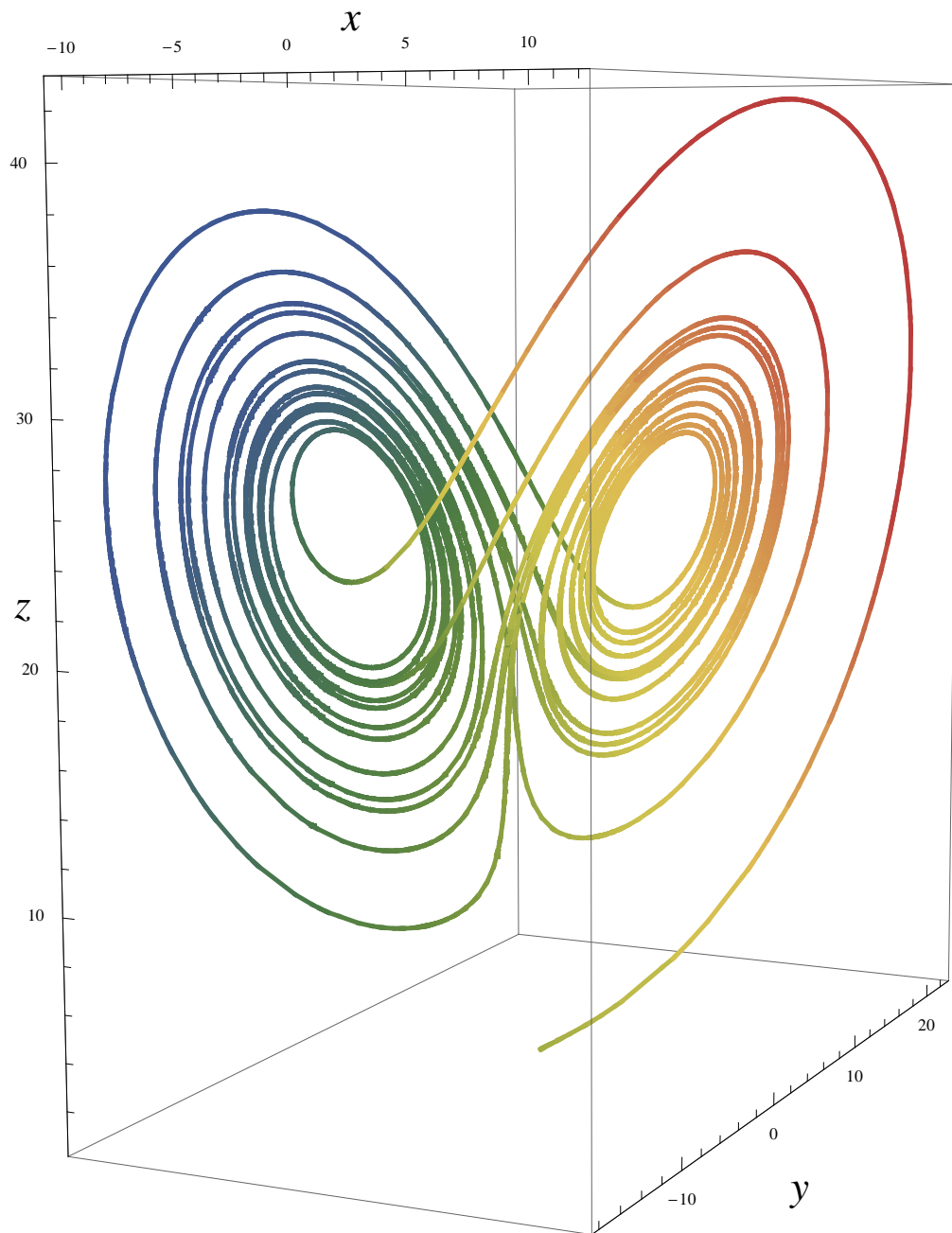


Abbildung 9.6: Eine Lösung mit wirrem Verhalten