Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

WS 2018/2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Gewöhnliche Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 18.10.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = \min\left\{ \dfrac{t^2}{x^2(t)}, \dfrac{t^{-2}}{x^2(t)}, t^2, t^{-2} \right\}, \\ x(0) = 0\,. \end{cases}$$

Hinweis: Trennung der Variablen

Aufgabe 2 (6 Punkte)**:** Ordnen Sie jeder Differentialgleichung ein Bild zu. In jedem Bild finden Sie vier dazugehörige Lösungen der jeweiligen Differentialgleichung.

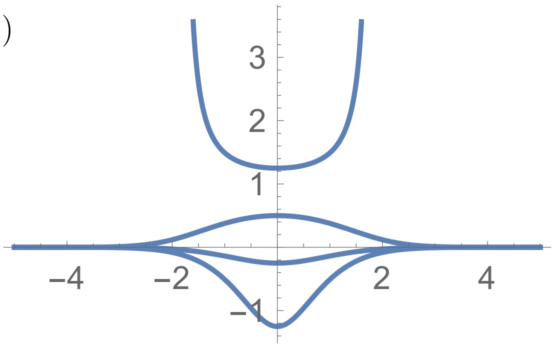
(a) $y'(x) = -xy(x)\,(1 - y(x))$

(b) $y'(x) = x^2 y(x)\,(1 - y(x))$

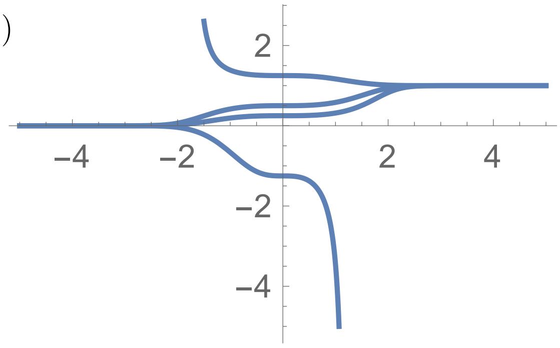
(c) $y'(x) = xy(x)\,(1 - y(x))$

(d) $y'(x) = xy(x)\,(1 - y^2(x))$

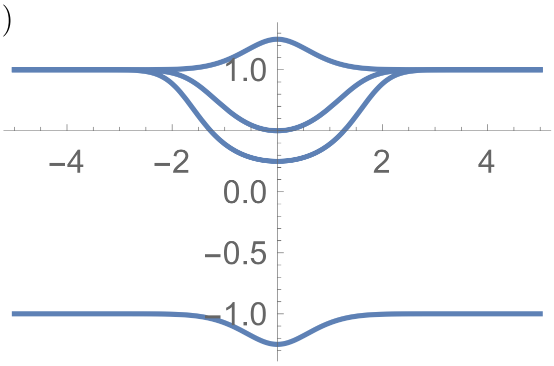
1.)



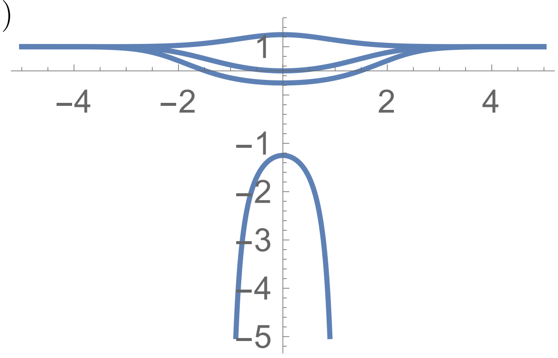
2.)



3.)



4.)



Aufgabe 3 (6 Punkte)**:** Ein Fallschirmspringer erreicht in kurzer Zeit nach dem Öffnen des Fallschirms eine fast konstante vertikale Geschwindigkeit. Welches Modell würde da am Besten passen?

(a) $m\ v'(t) = -mg - c_w v(t)$.

(b) $m\ v'(t) = -mg - c_w (v(t))^2$.

(c) $m\ v'(t) = -mg - c_w v(t)\,|v(t)|$.

Hier ist m die Masse, v die vertikale Geschwindigkeit und c_w eine positive Reibungskonstante. $g = 9.81 > 0$ ist die Erdbeschleunigung. Begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 4: Berechnen Sie alle Lösungen zu:

(a) $x'(t) = x(t)\left(1 - x(t)^2\right)$;

(b) $x'(t) = t\left(1 - x(t)^2\right)$;

(c) $x(t) = t\ \tan(x'(t))$;

(d) $t\ x'(t) + x(t) = t^2$.

Aufgabe 5 (8 Punkte)**:**
Geben Sie die maximalen Existenzintervalle der Lösungen dieser Differentialgleichungen:

(a) $\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{2}{3} t\, x^4(t) \\ x(1) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t}{3x^2(t)} + \dfrac{x(t)}{t} \\ x(1) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t) = t\, x(t) - t\, x^3(t) \\ x(-1) = \sqrt{\frac{e}{e-1}} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + x^2(t) - e^{2t} \\ x(0) = -\frac{e+1}{e-1} \end{cases}$