Prof. Dr. Guido Sweers **WS 2018/2019**
Jan Gerdung, M.Sc. **Inka Schnieders, M.Sc.**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Gewöhnliche Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 19.12.2018, um 12 Uhr.

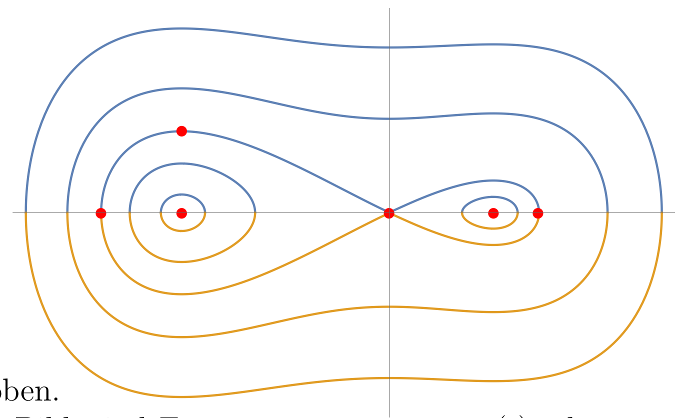
Aufgabe 1 (1+1+3+2 Punkte) Nehmen wir $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

a. Sei die Funktion $V : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Lösung von
$$V(s)\,V'(s) = f(s, V(s))\,. \tag{1}$$
Begründen Sie, dass (1) mit $V(s_0) = V_0 > 0$ lokal genau eine Lösung hat.

b. Wenn (a,b) mit $-\infty \leq a < s_0 < b \leq \infty$ das maximale Existenzintervall von V ist, welche Möglichkeiten hat man für $V(s)$ wenn $s \downarrow a$ und wenn $s \uparrow b$?

c. Sei V wie in a) und sei $u : (c,d) \to \mathbb{R}$ eine Lösung von
$$u'(t) = V(u(t))\,. \tag{2}$$
Zeigen Sie, dass
$$u''(t) = f(u(t), u'(t)) \text{ für } t \in (c,d)\,.$$

d. Welche Anfangswerte bei (1) und (2) muss man nehmen, um eine Lösung von
$$\begin{cases} u''(x) = f(u(x), u'(x)) \\ u(x_0) = u_0 \\ u'(x_0) = v_0 \neq 0 \end{cases}$$
zu bekommen?



Aufgabe 2 (3+3 Punkte) Die Phasenebene für $u''(t) = u(t)(1-u(t))(2+u(t))$ wird skizziert in dem Bild hier rechts oben.
Die sechs roten Punkte $\{p_i\}_{i=1}^{6}$ in dem Bild, sind Extremwerte von $t \mapsto u(t)$ oder $t \mapsto u'(t)$.

a. Berechnen Sie die Koordinaten dieser sechs Punkte p_i.

b. Erklären Sie für jeden p_i, was es bedeutet für eine Lösung u, wenn es t_0 gibt mit
$$(u(t_0), u'(t_0)) = p_i.$$

Aufgabe 3 Skizzieren Sie die Phasenebene für $x''(t) = f(x(t))$, wenn

a. $f(x) = 2x^2 - x^4$,

b. $f(x) = x^4 - 2x^2$,

c. $f(x) = x\cos(x)$.

Aufgabe 4 Skizzieren Sie die Phasenebene für $u''(t) = -u(t)\, u'(t)^2$.

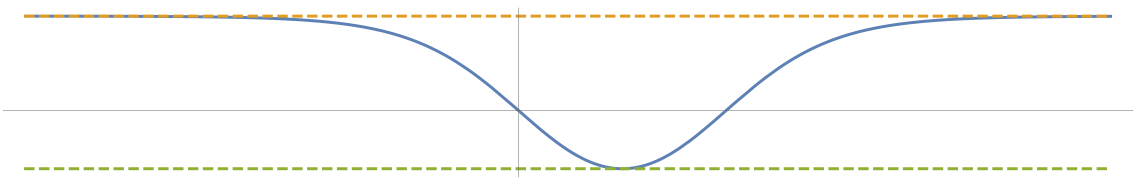
Aufgabe 5 (3+2+2 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x''(t) = x(t)\,(x(t) - 1)\,(x(t) + 2)\,.$$

a. Skizzieren Sie die Phasenebene.

b. Hat diese Gleichung periodische Lösungen? Was gilt in dem Fall für $(x(0), x'(0))$?

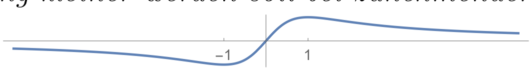
c. Eine Lösung mit Asymptoten ist skizziert im folgenden Bild. Berechnen Sie die Asymptote und das Minimum der Funktion.

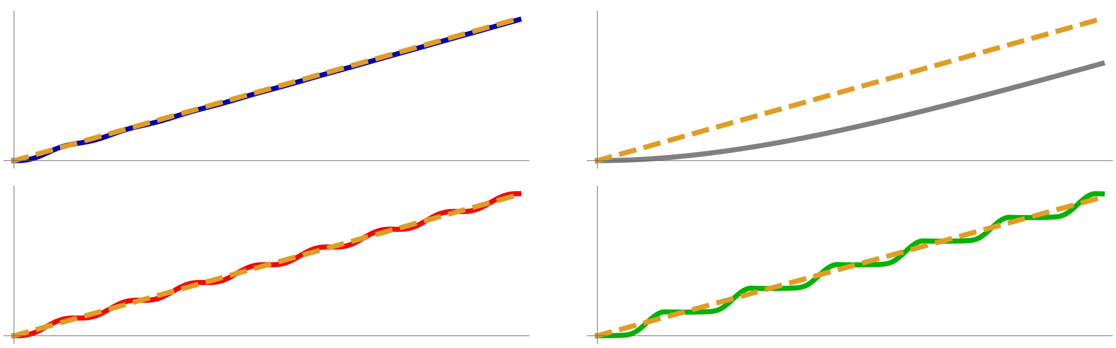


Aufgabe 6 Man betrachte für $c \in \left\{\frac{1}{2}, 20\right\}$ und $v \in \left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x''(t) = v\ t - x(t) - c\frac{x'(t)}{x'(t)^2+1}, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

Die 4 Lösungen sind skizziert in der folgenden Abbildung. Welches Bild von $x(t)$ gehört zu welcher Kombination von c und v?
Hinweis: Diese Gleichung modelliert ein ähnliches Konstrukt wie in der Abbildung auf Seite 111 vom Skript. Überlegen Sie, was c und v bedeuten und verwenden Sie, dass für den Stick-Slip-Effekt die Reibung kleiner werden soll bei zunehmender Geschwindigkeit. Eine Skizze von $s \mapsto \frac{s}{s^2+1}$:





Die gestrichelte Gerade gehört zu $x = v\ t$.