Prof. Dr. Guido Sweers **WS 2018/2019**
Jan Gerdung, M.Sc. **Inka Schnieders, M.Sc.**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Gewöhnliche Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 10.01.2019, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (1+1+1+2+2+1 Punkte) Wir betrachten für

$$F(s) = \begin{cases} \sqrt{s} & \text{für } s \geq 0, \\ 0 & \text{für } s < 0, \end{cases}$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = F\left(5x(t) - t^2\right), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

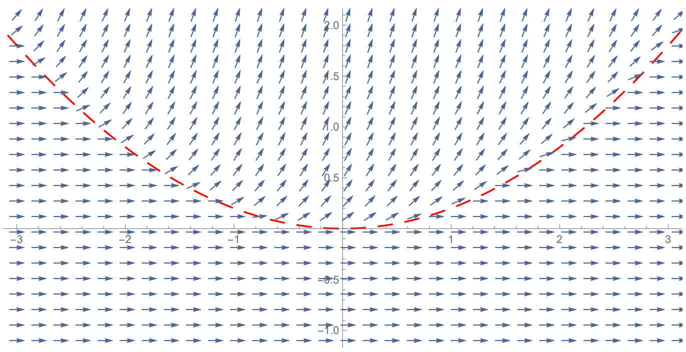
a. Zeigen Sie, dass F stetig, jedoch nicht Lipschitz-stetig ist auf $\mathbb{R}$.

b. Es gibt Lösungen der Form $x(t) = a\,t^2$ für $t \geq 0$. Berechnen Sie alle mögliche $a \in \mathbb{R}$.

c. Begründen Sie mit Hilfe des Vektorfeldes, dass

$$x(t) = 0 \text{ für } t \leq 0$$

die eindeutige Lösung von (1) auf $(-\infty, 0]$ ist.



d. Für den Beweis vom Satz von Peano wurden Funktionen x_n für $n \in \mathbb{N}^+$ definiert. Im jetzigen Fall wird dies:

$$\begin{cases} x_n(t) = 0 \text{ für } t \leq 0, \\ x_n(t) = \displaystyle\int_0^t F\left(5x_n\left(s - \tfrac{1}{n}\right) - s^2\right) ds \text{ für } t > 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie $x(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t)$.

e. Seien $x_0, t_0 > 0$. Begründen Sie, dass jede differenzierbare Lösung von

$$\begin{cases} x'(t) = F\left(5x(t) - t^2\right), \\ x(t_0) = x_0 < \frac{1}{5}t_0^2, \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ als maximales Existenzintervall hat ...

f. ... und $x(0) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 2 (3+3+0+0 Punkte) Welche der folgenden Anfangswertprobleme haben genau eine Lösung. Begründen Sie Ihre Antworten.

a. $\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 - \sqrt[3]{t}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$

b. $\begin{cases} x'(t) = \sqrt[3]{x(t)}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$

c. $\begin{cases} x'(t) = -t\sqrt[3]{x(t)}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$

d. $\begin{cases} x'(t) = \sqrt[3]{x(t)} + 1, \\ x(0) = 0. \end{cases}$

Aufgabe 3 Ist die Funktion gleichmäßig stetig oder nicht?

a. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = x^3$;

b. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $v(x) = \sqrt[3]{x}$;

c. $w : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $w(x) = \sqrt[3]{x}\cos(1/x)$.

Aufgabe 4 (Wählen Sie eine Teilaufgabe für 3 Punkte)
Sind die folgenden Funktionen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ gleichgradig stetig?

a. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = n(1-x)x^n$;

b. $g_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $g_n(x) = \sqrt[4]{x^2 + \frac{1}{n}}$;

c. $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$.

Aufgabe 5 (3 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen von $x'(t) = \sqrt{1 - x(t)^2}$.
Hinweis: alle Lösungen sind Funktionen $x : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

Aufgabe 6 Die Funktionen $u(t) = -1$ und $u(t) = 1$ sind Lösungen von

$$u'(t) = \sqrt[3]{1 - u(t)^2}.$$

a. Zeigen Sie, dass für alle sonstigen beschränkten Lösungen gilt

$$\lim_{t\downarrow-\infty} u(t) = -1 \text{ und } \lim_{t\to\infty} u(t) = 1.$$

b. Zeigen Sie, dass alle Lösungen $\mathbb{R}$ als maximales Existenzintervall haben.

c. Zeigen Sie, dass für jede unbeschränkte Lösung u gilt, entweder

$$\lim_{t\downarrow-\infty} u(t) = \infty \text{ oder } \lim_{t\to\infty} u(t) = -\infty.$$