Prof. Dr. Guido Sweers **WS 2018/2019**
Jan Gerdung, M.Sc. **Inka Schnieders, M.Sc.**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 12

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Gewöhnliche Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 17.01.2019, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5+1 Punkte)**:** Betrachte

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \text{ und } u'(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie eine Greensche Funktion $G(x, y)$ für (1).

(b) Zeigen Sie: Aus $f \geq 0$ folgt $u \geq 0$.

Aufgabe 2 (4+2+2 Punkte)**:** Wir betrachten

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = f(x)\,, \\ u(0) = u(\pi) = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Für welche λ kann man die Lösung von (2) mittels Greenscher Funktion darstellen?

(b) Für welche λ hat (2) mit $f = 0$ nicht-triviale Lösungen?

(c) Sei λ_1 das im absoluten Sinne kleinste λ aus Teil (b) und sei φ eine zugehörige nicht-triviale Lösung. Zeigen Sie:

  (i) Falls $\int_0^\pi f(x)\varphi(x)dx = 0$ gilt, hat (2) unendlich viele Lösungen.

  (ii) Falls $\int_0^\pi f(x)\varphi(x)dx \neq 0$ gilt, hat (2) keine Lösung.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion $G(x, y)$ für

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x)u'(x)\right) + q(x)u(x) = f(x) \text{ für } x \in (a,b) \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

die folgenden Eigenschaften hat:

(a) Mit Ausnahme der Stelle $x = y$ erfüllt $x \mapsto G(x, y)$ das Randwertproblem (3) mit $f = 0$.

(b) $\lim\limits_{x \downarrow y} \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) - \lim\limits_{x \uparrow y} \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) = \frac{1}{p(y)}$.

Aufgabe 4 (3+2+1+0 Punkte)**:** Ein Schneeball, der mit voller Kraft geworfen wird, und der einer linearen Luftreibung unterliegt, modelliert man durch folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} x''(t) = -R\, x'(t)\,, \\ y''(t) = -R\, y'(t) - mg, \end{cases}$$

mit Anfangswerte

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen $R = 1$ ($\sec^{-1}$), $m = 0.2$ (kg) und $g = 10$ (m/sec^2). Wir wollen das Ziel in

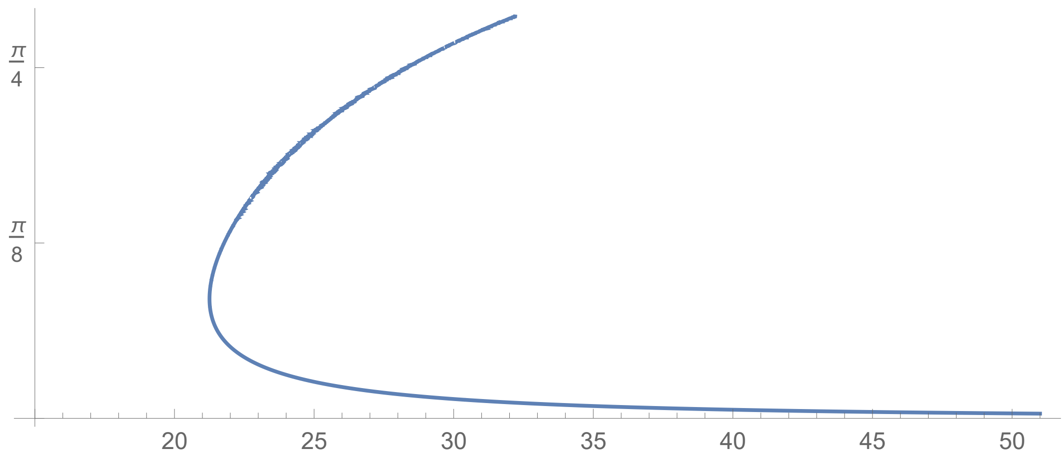
$$\begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (in m)}$$

mit dem Schneeball erreichen. Die Anfangsgeschwindigkeit ist V (in m/sec) und φ ist der Winkel.

(a) Berechnen Sie eine Bedingung für V und φ, die erfüllt werden muss, um das Ziel zu erreichen.

(b) Zeigen Sie, dass die Anfangsgeschwindigkeit $V = 20$ (m/sec) nicht ausreicht, um das Ziel zu erreichen. Den Winkel φ kann man frei bestimmen.

(c) Beigefügt ist eine numerische Skizze für die Kombinationen von V und φ, bei denen das Zeil erreicht wird. Erklären Sie die Form dieser Kurve.



(d) Nimmt man an, dass der Schneeball quadratischer Luftreibung unterliegt, so modelliert man dies durch folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = -\tilde{R}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

Erklären Sie, ob und wie man hier Lösungen bestimmen kann.

Bitte beachten Sie: Dies ist das letzte bepunktete Übungsblatt. Für die Klausurzulassung benötigen Sie 120 Punkte.