**Prof. Dr. Guido Sweers**
**Jan Gerdung, M.Sc.** **WS 2018/2019**

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Gewöhnliche Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Mittwoch, den 31.10.2018, um 15 Uhr.

**Aufgabe 1** (5 Punkte)**:** Sei $x : [0, a) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) = e^{t\,x(t)} & , \\ x(0) = 0 & . \end{cases}$$

Zeigen Sie $a < 2$.

*Hinweis: 1.) Zeigen Sie zunächst $x(t) \geq t$ für $t \geq 0$.*
*2.) Verwenden Sie danach $e^{tx} \geq e^{x}$ für $t \geq 1$ und $x \geq 0$.*

**Aufgabe 2:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $f$ heißt Lipschitz-stetig auf $I$ mit Lipschitz-Konstante $L_I$, wenn für alle $x, y \in I$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L_I\,|x - y| \ .$$

Richtig oder falsch?

(a) Ist $f$ Lipschitz-stetig, so ist $f$ gleichmäßig stetig.

(b) Ist $f$ gleichmäßig stetig, so ist $f$ Lipschitz-stetig.

(c) Ist $f$ differenzierbar mit beschränkter Ableitung, so ist $f$ Lipschitz-stetig.

(d) Ist $f$ Lipschitz-stetig, so ist $f$ differenzierbar mit beschränkter Ableitung.

Begründen Sie Ihre Antworten.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)**:** Seien $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$. Wir wollen das folgende Ergebnis zeigen:

$$AB = BA \Leftrightarrow e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie $\Rightarrow$ mit Hilfe der Definition von $e^M$ für $M \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie $\Leftarrow$ mit Hilfe der zweiten Ableitung $\left(e^{t(A+B)}\right)'' = \left(e^{tA}e^{tB}\right)''$ an der Stelle $t = 0$.

(c) Geben Sie $A, B \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

**Aufgabe 4** (10 Punkte)**:** Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0$. Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} \cosh(\beta t) \\ \sinh(\beta t) \end{pmatrix} & \text{für } t \in \mathbb{R}\,, \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

**Aufgabe 5:** Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $$\begin{cases} \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t) & \text{für } t \in \mathbb{R}\,, \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x(t) - x''(t) = 5\sin(2t) & \text{für } t \in \mathbb{R}\,, \\ x(0) = 0\,, \\ x'(0) = 4\,. \end{cases}$$

*Hinweis: Bei der Klausur dürfen Sie WolframAlpha nicht benutzen, üben Sie daher ohne WolframAlpha!*

**Aufgabe 6:** Die Funktionen

$$\vec{x}_a(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t-1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_b(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{und} \ \vec{x}_c(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind Lösungen von

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2t} & -\frac{1}{2t} \\ -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Lösungen für positive Zeiten $t > 0$.