Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc. **WS 2018/2019**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Gewöhnliche Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 08.11.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (0+2+2+2+0 Punkte)**:** Berechnen Sie alle Lösungen:

(a) $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 10\cos(x) - 2x$

(b) $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^x(2x - 1)$

(c) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = xe^{-x}$

(d) $y^{(6)}(x) = y''(x)$

(e) $y^{(8)}(x) - 16y(x) = e^x \sin(x)$

Aufgabe 2: Der Satz von Gershgorin besagt, dass es für jeden Eigenwert λ der Matrix $(a_{ij}) \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

gibt. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ betrachten wir das System $x'(t) = Ax(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a^3 & b & a & a-b \\ a & b^3 & 0 & b \\ 0 & b^2 & a^2b & ab \\ a^2 & 0 & a+b & ab^2 \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie den Satz von Gershgorin um zu zeigen:

(a) Das System $x'(t) = Ax(t)$ ist für $\min\{a, b\} > 2$ instabil.

(b) Das System $x'(t) = Ax(t)$ ist für $\max\{a, b\} < -2$ stabil.

Aufgabe 3: Die Matrix A hat das charakteristische Polynom:

(a) $\det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)^4 + 1$

(b) $\det(A - \lambda I) = \lambda^6 + 2\lambda^5 + \lambda^4 - 3\lambda^3 - 4\lambda$

Ist $x'(t) = Ax(t)$ stabil?

Aufgabe 4 (5 Punkte)**:** Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & a \end{pmatrix}$$

gegeben. Prüfen Sie, für welche a das System $x'(t) = Ax(t)$ asymptotisch stabil, neutral stabil bzw. instabil ist.

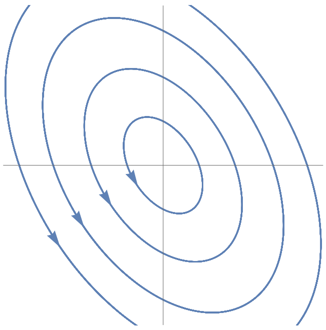
Aufgabe 5 (9 Punkte)**:** Wir betrachten das System $x'(t) = Ax(t)$ mit A als einer der folgenden Matrizen:

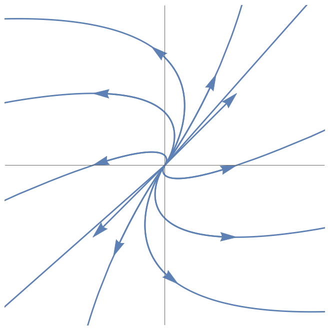
(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

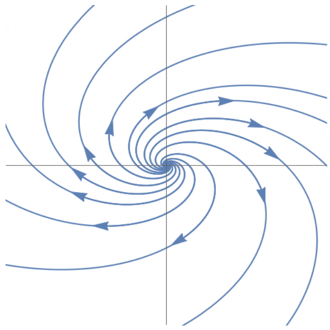
(d) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

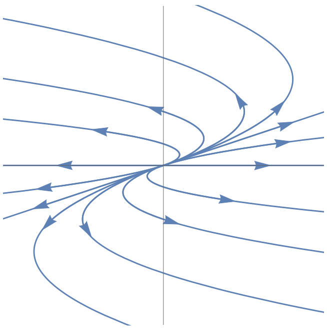
(g) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

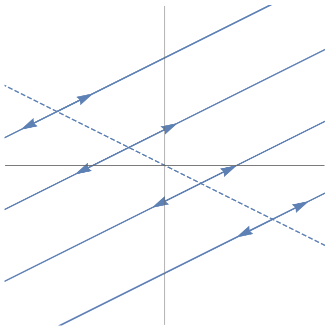
Ordnen Sie jedem System das passende Bild zu und begründen Sie Ihre Wahl.

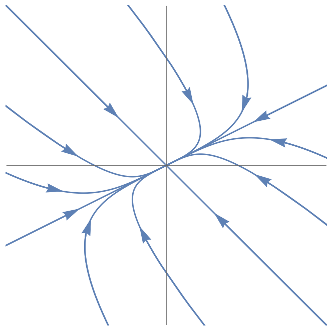
1. 

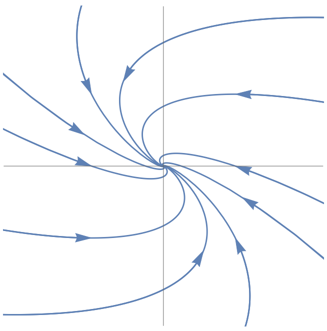
2. 

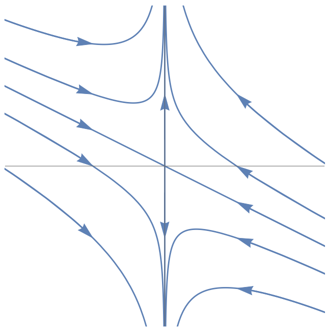
3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9.