Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc. **WS 2018/2019**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Gewöhnliche Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 15.11.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (0+3+0 Punkte)**:** Wir wollen eine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

als Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ darstellen.

(a) Bestimmen Sie für $f(x,y) = x + x^2 + x^3 + y^2$ und $y_0 = 1$ die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$.

(b) Bestimmen Sie für $f(x,y) = x^3 + y^3$ und $y_0 = 0$ die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{25}$.

(c) Bestimmen Sie für $f(x,y) = x + e^y$ und $y_0 = 0$ die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**:** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = x^3 + y^3(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Picard-Iterationen y_0, y_1, y_2, y_3.

Aufgabe 3 (0+0+2+0+2)**:** Wir betrachten die folgenden Funktionen f_i, definiert auf D_i:

(a) $f_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = x + e^{-x}$

(b) $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

(c) $f_3 : \{\, z \in \mathbb{C} \;;\; \|z\| \le 1 \,\} \to \mathbb{C}$ mit $f_3(z) = \frac{1}{2}(z^2 + 1 - i)$

(d) $f_4 : C([0,1]) \to C([0,1])$ mit $(f_4(x))(t) = x(t^2) + 1$

(e) $f_5 : C([0,1]) \to C([0,1])$ $(f_5(x))(t) = \frac{1}{2}x(t^2) + t$

Dabei sei $\mathbb{R}$ mit dem Betrag als Norm, $\mathbb{C}$ mit dem komplexen Betrag und $C([0,1])$ mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm versehen. Beantworten Sie mit Beweis jeweils die folgenden Fragen:

1. Gilt $\|f_i(x) - f_i(y)\| < \|x - y\|$ für alle $x, y \in D_i$ mit $x \neq y$?
2. Gibt es ein $L \in (0,1)$, so dass $\|f_i(x) - f_i(y)\| \le L\,\|x - y\|$ gilt für alle $x, y \in D_i$?
3. Wie viele Fixpunkte hat f_i?

Aufgabe 4: Für stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wird die Norm $\|f\|_2$ definiert durch

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

(a) Zeigen Sie, dass es ein $C > 0$ gibt, sodass für alle $f \in C([a,b])$ gilt, dass

$$\|f\|_2 \leq C \, \|f\|_\infty .$$

(b) Zeigen Sie, dass jede Folge in $C([a,b])$, die bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm konvergiert, dies auch bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm tut.

(c) Finden Sie eine Folge von Funktionen aus $C([a,b])$, die bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm konvergiert, aber nicht bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

(d) Ist $\|\cdot\|_\infty$ auch eine Norm für die stetigen Funktionen auf dem offenen Intervall (a,b)?

Aufgabe 5 (2+2+1 Punkte)**:** Für eine stetige Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definieren wir die Norm

$$\|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(x)| \, dx .$$

Wir betrachten die Funktionenfolge $\{f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx & \text{für } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{für } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

(a) $\{f_n\}$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist, aber

(b) bezüglich dieser Norm keine stetige Funktion als Grenzwert hat.

(c) Ist $(C([-1,1]), \|\cdot\|_1)$ vollständig?

Aufgabe 6 (0+0+5+0 Punkte)**:** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = 3t \sqrt[3]{y(t)} \, , \\ y(0) = 0 \, . \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie mit dem Euler-Vorwärts-Verfahren die Approximationen von $y(h)$, $y(2h)$, $y(3h)$, … für Schrittgröße $h > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $y(t) = t^3$ eine Lösung ist.

(c) Kann man die Lösung in (b) mit dem Euler-Vorwärts-Verfahren oder Euler-Rückwärts-Verfahren approximieren?

(d) Berechnen Sie alle Lösungen diese Anfangswertproblems.