Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

WS 2018/2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Gewöhnliche Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 22.11.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Wir definieren $T : C\,[0,1] \to C\,[0,1]$ durch

$$(Tf)\,(x) = \sqrt{x} f\left(\sqrt{x}\right),$$

Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f_0 \in C\,[0,1]$ und $f_n := T^n f_0$ gilt:

(a) $\|f_n\| \leq \|f_0\|$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\,(x) = x f_0\,(1)\,.$

(c) Welche Fixpunkte hat T?

Hinweis: Zeigen Sie $f_n\,(x) = x^{1-2^{-n}} f_0\left(x^{\left(2^{-n}\right)}\right)$ *für* $x \in [0,1]$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**:** Geben Sie die Intervalle an, auf dem die Funktion gleichmäßig Lipschitz ist und geben sie eine zugehörige Lipschitz-Konstante:

(a) $f_a\,(x) = \sqrt[3]{x}$;

(b) $f_b\,(x) = x + e^x$;

(c) $f_c\,(x) = \begin{cases} x \sin\left(1/x\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 3 (8 Punkte)**:** Gegeben sei das System von Differentialgleichungen

$$u'(t) = Au(t) + f(t,u),\ t \geq 0.$$

A sei eine Matrix mit konstanten Koeffizienten und für die Eigenwerte λ_i gelte $\mathrm{Re}\lambda_i < a$. Die Funktion f sei stetig und es gebe eine stetige Funktion $g(t)$, so dass $|f(t,x)| \leq g(t)\,|x|$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante c gibt, so dass $\left\|e^{tA}\right\| \leq ce^{at}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Lösung die folgende Form hat:

$$u(t) = e^{tA}u(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s,u(s))ds\,.$$

(c) Verwenden Sie das Lemma von Grönwall für die Funktion $\Phi(t) = e^{-at}\,|u(t)|$, um

$$|u(t)| \leq C\,|u(0)|\,e^{at+G(t)}$$

zu zeigen. Hier ist $G(t) := \int_0^t g(s)ds$ und C hängt nicht von u ab.

Aufgabe 4: Seien A und B in $M^{2\times 2}(\mathbb{R})$. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\vec{x}\,'(t) = \left(A + e^{-t}B\right)\vec{x}(t)$$

Zeigen Sie, dass wenn alle Eigenwerte von A negative Realteile haben, dann gilt für jeden Anfangswert $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$:

(a) Die Lösung existiert auf $[0, \infty)$,

(b) $\lim_{t\to\infty} \vec{x}(t) = \vec{0}$.

Aufgabe 5: Für welche der folgenden Differentialgleichungen ist $\mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall?

(a) $x'(t) = \dfrac{\sin(x(t))}{1 + t^2 + (x(t))^2}$ mit $x(0) = 0$,

(b) $x'(t) = e^{tx(t)}$ mit $x(0) = 0$,

(c) $x'(t) = e^{-tx(t)}$ mit $x(0) = 0$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)**:** Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} -x\log\left(x^2\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f nicht Lipschitz ist.

(b) Zeigen Sie, dass man jede Lösung von $x'(t) = f(x(t))$ wie folgt schreiben kann:

- $x(t) = 0$ für $t \in \mathbb{R}$,
- $x(t) = \exp(c\ \exp(-2t))$ für $t \in \mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R}$,
- $x(t) = -\exp(c\ \exp(-2t))$ für $t \in \mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Eine Skizze dieser Lösungen finden Sie unten.

(c) Wie viele Lösungen hat $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = 0. \end{cases}$