Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

WS 2018/2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Gewöhnliche Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 29.11.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**:** Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist definiert durch

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} x + y - x^3 - 1 \\ -(1-x)^2 (x+y) \end{pmatrix}$$

und wir betrachten das Differentialgleichungssystem

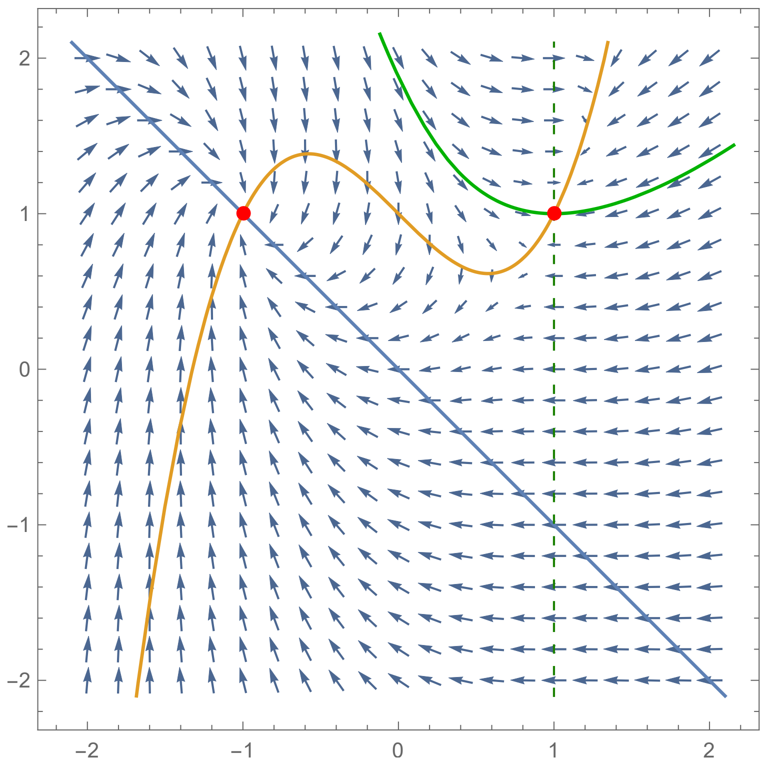
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = v(x(t), y(t)). \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $p_1 = (1, 1)$ und $p_2 = (-1, 1)$ die einzigen Gleichgewichtspunkte sind.

(b) Geben sie die um p_1 und um p_2 linearisierte Gleichungssysteme.

(c) Welche Typen sind dies? Und mit welcher (In)Stabilität?

(d) Welche Aussage liefert dies für das ursprüngliche System in (1)?



Das Vektorfeld mit drei Nullklinen und zwei Lösungen zu (1).

(e) Ist die nächste Behauptung war?
Bei jedem Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *gilt für die zugehörige Lösung von (1) entweder*

$$\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = p_1 \text{ oder } \lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = p_2.$$

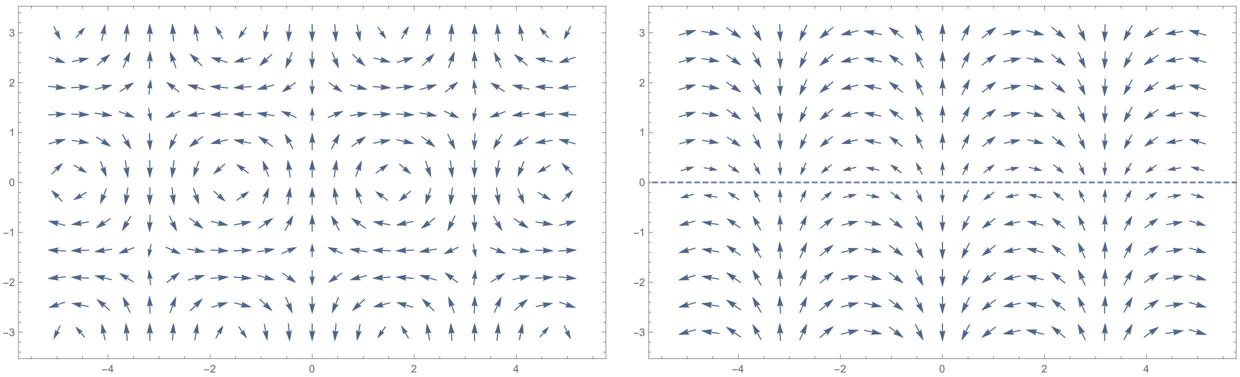
Begründen Sie Ihre Antwort.

(f) Ist die nächste Behauptung wahr?
Für (1) ist p_1 *ein instabiler Gleichgewichtspunkt.*
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: Wir betrachten die Differentialgleichungssysteme

(a) $\begin{cases} x'(t) = \sin(x(t))\sin(y(t)), \\ y'(t) = \cos(x(t))\cos(y(t)). \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x'(t) = y(t)\sin(x(t)), \\ y'(t) = y(t)\cos(x(t)). \end{cases}$

Bestimmen Sie jeweils alle Gleichgewichtspunkte und die dazugehörigen linearisierten Systeme. Bestimmen Sie die jeweilige (In)Stabilität der linearisierten Systeme. Welche Aussage liefert dies für die (In)Stabilität der Gleichgewichtspunkte?



Aufgabe 3 (10 Punkte)**:** Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) + x(t) - x(t)\,(x^2(t) + y^2(t)) \\ y(t) - x(t) - y(t)\,(x^2(t) + y^2(t)) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(0,0)$ der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems ist.

(b) Bestimmen Sie das linearisierte Gleichungssystem um $(0,0)$. Welche Aussage kann man über die Stabilität des linearisierten Systems treffen?

(c) Zeigen Sie: Ist $(x,y) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (2), so löst $w : I \to \mathbb{R}$, $w(t) = x^2(t) + y^2(t)$ die Differentialgleichung $w'(t) = 2w(t)\,(1 - w(t))$.

(d) Zeigen Sie, dass für jede Lösung $(x,y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von (2) mit $(x(0), y(0)) \neq (0,0)$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \|(x(t), y(t))\| = 1.$$

(e) Welche Aussage kann man über die Stabilität von (2) bei $(0,0)$ treffen?