Prof.Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

WS 2018/2019

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Gewöhnliche Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 6.12.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 Sei $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Differentialungleichung

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)^2\right) \leq c\, x(t)^2 .$$

a. Zeigen Sie, dass jede Funktion $x \in C^1(a,b)$, die diese Ungleichung erfüllt, beschränkt ist in b.

b. Sei nun $c < 0$. Begründen Sie dass, wenn $x \in C^1[0,\infty)$ diese Ungleichung erfüllt, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ gilt.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Ist die symmetrische bilineare Form $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 3x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

ein positiv definites skalares Produkt auf $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3 (0+0+3+3 Punkte) Wir betrachten Lösungen $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ von

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \vec{x}(t). \tag{1}$$

a. Zeigen Sie, dass für jede Lösung $\vec{x}$ gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\|\vec{x}(t)\|^2\right) \leq -5\, \|\vec{x}(t)\|^2 .$$

b. Begründen Sie, dass für jede Lösung $\vec{x}$ gilt, dass

$$\|\vec{x}(t)\| \leq e^{-\frac{5}{2}t}\, \|\vec{x}(0)\|$$

c. Zeigen Sie, dass für jede Lösung $\vec{x}$ gilt

$$\frac{d}{dt}\left(2x_1(t)^2 + 3x_2(t)^2 + x_3(t)^2\right) \leq -12\left(2x_1(t)^2 + 3x_2(t)^2 + x_3(t)^2\right).$$

d. Begründen Sie, dass für jede Lösung $\vec{x}$ gilt, dass

$$\|\vec{x}(t)\| \leq 2e^{-6t}\, \|\vec{x}(0)\| .$$

Aufgabe 4 (3+3 Punkte) Wir betrachten

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u(t)\,(2+v(t)) \\ v(t)\left(u(t)^2-2\right) \end{pmatrix}.$$

a. Berechnen Sie $\varepsilon > 0$ derart, dass für $\left\| \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$ gilt

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)^2+v(t)^2\right) \leq -2\left(u(t)^2+v(t)^2\right).$$

b. Begründen Sie, dass mit diesem ε folgendes gilt:

$$u(0)^2+v(0)^2 < \varepsilon^2 \implies \lim_{t\to\infty}(u(t),v(t)) = (0,0).$$

Aufgabe 5 (0+5 Punkte)

a. Sei $x \in C^1[0,\infty)$ eine Funktion, für die gilt

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)^2\right) \leq -x(t)^4 \text{ für alle } t \geq 0$$

und $x(0) = 1$. Zeigen Sie, dass $|x(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ für $t > 0$.

b. Sei $x \in C^1[0,\infty)$ eine Funktion, für die gilt

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)^2\right) \leq -|x(t)| \text{ für alle } t \geq 0$$

und $x(0) = 1$. Berechnen Sie $x(t)$ für $t \geq 2$.