Prof. Dr. Guido Sweers **WS 2018/2019**
Jan Gerdung, M.Sc. **Inka Schnieders, M.Sc.**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Gewöhnliche Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 12.12.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 Wir betrachten das System

$$\begin{cases} x'(t) = (3 + y(t) - 2x(t))\, x(t), \\ y'(t) = (2 + x(t) - y(t))\, y(t). \end{cases}$$

a. Zeichnen Sie das zugehörige Vektorfeld auf $[0,\infty) \times [0,\infty)$.
b. Wenn $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine Lösung ist mit $x(0), y(0) \in \mathbb{R}^+$, dann beschreiben Sie, was passiert für $(x(t), y(t))$ wenn $t \to \infty$.

Aufgabe 2 (2+2+1+1+3+1 Punkte) Wir betrachten das System

$$\begin{cases} x'(t) = (-1 - x(t) + 2y(t))\, x(t), \\ y'(t) = (2 - x(t))\, y(t). \end{cases}$$

a. Zeichnen Sie das zugehörige Vektorfeld auf $[0,\infty) \times [0,\infty)$.
b. Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte in $[0,\infty) \times [0,\infty)$ und betrachten Sie die zugehörigen linearisierten Systeme mit deren Stabilität.
c. Wenn $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine Lösung ist mit $x(0), y(0) \in \mathbb{R}^+$, dann beschreiben Sie, was passiert für $(x(t), y(t))$ wenn $t \to \infty$. Begründen Sie Ihre Antwort.
d. Wenn $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine Lösung ist mit $x(0) = 0$ und $y(0) \in \mathbb{R}^+$, dann beschreiben Sie, was passiert für $(x(t), y(t))$ wenn $t \to \infty$. Begründen Sie Ihre Antwort.
e. Zeigen Sie, dass $V(x,y) = x + 2y - \ln(2x^2) - 3\ln\left(\frac{1}{3}y\right) - 5$ eine Lyapunov-Funktion ist.
f. Begründen Sie, dass jede Lösung mit $x(0), y(0) \in \mathbb{R}^+$ beschränkt bleibt für $t \to \infty$.

Aufgabe 3 Wir betrachten das System dreier kompetitiver Spezies:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ mit } F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4 - \alpha(y+z) - x)\, x \\ (4 - \alpha(x+z) - y)\, y \\ (4 - \alpha(x+y) - z)\, z \end{pmatrix}$$

für $\alpha > 0$.

a. Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte $p_a \in (0,\infty)^3$ in Abhängigkeit von a.
b. Beschreiben Sie die Stabilität bei p_a für $a \in (0,1)$.
c. Beschreiben Sie die Stabilität bei p_a für $a \in (1,\infty)$.
d. Zeigen Sie, dass "$x(t_1) = y(t_1)$ für einen t_1" impliziert, dass "$x(t) = y(t)$ für alle t", wenn $(x(t), y(t), z(t))$ eine Lösung dieses Systems ist.
e. Sei $\alpha = 3$. Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t), z(t))$, wenn $(x(t), y(t), z(t))$ eine Lösung dieses Systems ist mit $(x(0), y(0), z(0)) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$.

Aufgabe 4 (1+2+2 Punkte) Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ mit } F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(4 - \frac{1}{2}(y+z) - x\right) x \\ \left(4 - \frac{1}{2}(x+z) - y\right) y \\ \left(4 - \frac{1}{2}(x+y) - z\right) z \end{pmatrix}$$

beim Gleichgewichtspunkt $(2,2,2)$. Sei $V(x,y,z) = x + y + z - 2\ln\left(\frac{1}{8}xyz\right) - 6$.

a. Sei $\overset{\bullet}{V}(x,y,z)$ die Ableitung von V in Richtung des Vektorfeldes F. Zeigen Sie, dass für $r, s, t > -2$ gilt, dass

$$\overset{\bullet}{V}(2+r, 2+s, 2+t) = -\tfrac{1}{2}(r+s)^2 - \tfrac{1}{2}(s+t)^2 - \tfrac{1}{2}(t+r)^2 .$$

b. Zeigen Sie, dass V eine Lyapunov-Funktion ist für das System beim Gleichgewichtspunkt $(2,2,2)$.

c. Begründen Sie, dass für jede Lösung dieses Systems mit $(x(0), y(0), z(0)) \in (\mathbb{R}^+)^3$ gilt, dass

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} z(t) = 2.$$

Aufgabe 5 (0+0+3+2 Punkte) Wir betrachten das System

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) + v(t)\cos(u(t)), \\ v'(t) = -u(t)\cos(u(t)) - 2v(t) + \sin(v(t)). \end{cases}$$

a. Zeigen Sie, dass $(0,0)$ der einzige Gleichgewichtspunkt für dieses System ist.

b. Zeigen Sie, dass $(0,0)$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

c. Zeigen Sie, dass $V(u,v) = u^2 + v^2$ eine Lyapunov-Funktion für dieses System ist.

d. Sei $t \mapsto (u(t), v(t))$ eine Lösung dieses Systems. Begründen Sie, dass

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} v(t) = 0.$$