1 Extra-Beispiel anlässlich der Vorlesung Woche 1

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right) \text{ mit } f(x,y) = 1 + (y-x)^3 - \frac{1}{y-x}. \tag{1}$$

Diese DGL hat keine direkte Anwendung als Modell zu irgendetwas, zeigt jedoch einige typische Merkmale. Dies ist kein Standardbeispiel, sondern gewählt, weil es viele Aspekte beinhaltet.

Bemerken Sie:

- Gesucht sind Lösungen $x \mapsto y(x)$, das heißt Funktionen $y : I \to \mathbb{R}$ mit I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Hier ist x die Variable.
- Die Funktion f ist definiert als Funktion von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\,; x = y\}$ zu $\mathbb{R}$. Für eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, die diese DGL löst, kann dann zwar irgendwo $y(x_0) = x_0$ gelten aber ohne dass die DGL an der Stelle erfüllt ist.

Die DGL wird ausgeschrieben als

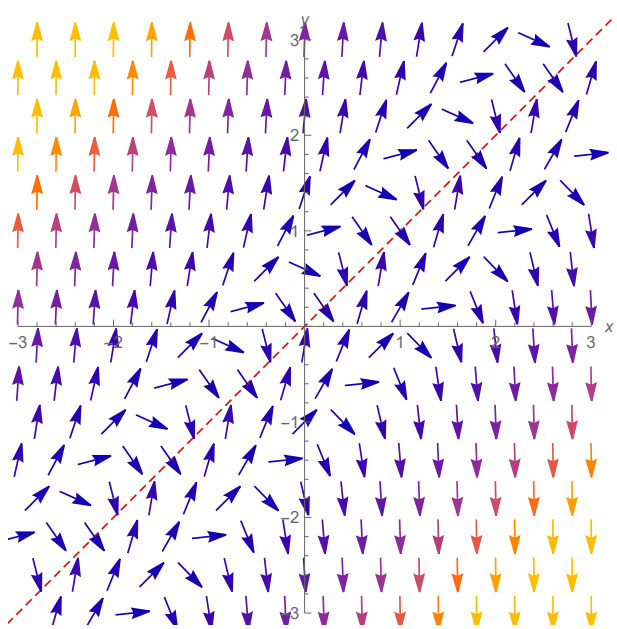
$$y'(x) = 1 + (y(x) - x)^3 - \frac{1}{y(x) - x}$$

2 Vektorfeld

Um einen Eindruck zu bekommen, wie die Lösungen aussehen, kann man an einer Stelle (x_0, y_0) die Richtung skizzieren, die eine Lösung an dieser Stelle hat. Das heißt: $y\left(x_0\right) = y_0$ und dann folgt

$$y'\left(x_0\right) = f\left(x_0, y_0\right).$$

Weil $y'\left(x_0\right)$ die Tangente an der Funktion $x \mapsto y(x)$ an der Stelle (x_0, y_0) liefert, lässt man die Richtung $(1, y'\left(x_0\right))$ skizzieren. Das kann man von Hand machen oder von irgendeiner Software machen lassen. Das Ergebnis sollte wie folgt aussehen:



3 Lösungsberechnung

Um die DGL zu lösen, substituieren wir $z(x) = y(x) - x$. Wenn y existiert dann existiert z und umgekehrt. Es folgt

$$z'(x) + 1 = 1 + z(x)^3 - \frac{1}{z(x)}$$

und diese DGL ist trennbar, denn

$$z'(x) = z(x)^3 - \frac{1}{z(x)}$$

und mit $\alpha(z) = z^3 - \frac{1}{z}$ und $\beta(x) = 1$ steht hier

$$z'(x) = \alpha(z(x))\,\beta(x).$$

Die Gleichung $\alpha(z) = 0$ hat als Lösung $z = 1$ und $z = -1$ und dies führt zu zwei besonderen Lösungen:

$$\begin{aligned} z(x) = 1 \quad &\Longrightarrow \quad y(x) = 1 + x, \\ z(x) = -1 \quad &\Longrightarrow \quad y(x) = -1 + x, \end{aligned}$$

Wir trennen für $z \neq \pm 1$ und finden:

$$\frac{z'(x)}{\alpha(z(x))} = \beta(x) \text{ und das wird } \frac{z'(x)}{z(x)^3 - \frac{1}{z(x)}} = 1.$$

Dies vereinfacht man zu

$$\frac{z(x)z'(x)}{z(x)^4 - 1} = 1 \tag{2}$$

und man sucht Stammfunktionen von den Funktionen

$$z \mapsto \frac{z}{z^4 - 1} \text{ und } x \mapsto 1.$$

Mit Partialbruchzerlegung folgt

$$\frac{z}{z^4 - 1} = \frac{\frac{1}{2}z}{z^2 - 1} - \frac{\frac{1}{2}z}{z^2 + 1}$$

und eine Stammfunktion

$$\tfrac{1}{4}\log\left|z^2 - 1\right| - \tfrac{1}{4}\log\left|z^2 + 1\right|.$$

Aus (2) folgt dann, dass für c eine beliebige Konstante:

$$\tfrac{1}{4}\log\left|z(x)^2 - 1\right| - \tfrac{1}{4}\log\left|z(x)^2 + 1\right| = x + c.$$

Die Lösungen sind bevorzugt in expliziter Form anzugeben und das gelingt hier mit $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ für $a, b > 0$:

$$\log\left|\frac{z(x)^2 - 1}{z(x)^2 + 1}\right| = 4x + 4c$$

und

$$\left|\frac{z(x)^2 - 1}{z(x)^2 + 1}\right| = e^{4x+4c},$$

$$\frac{z(x)^2 - 1}{z(x)^2 + 1} = \pm e^{4x+4c}.$$

Das heißt, wenn wir $C = \pm e^{4c}$ nehmen und auch bemerken, dass $z(x) = 1$ eine Lösung ist, bei der $C = 0$ gilt, haben wir Lösungen für alle $C \in \mathbb{R}$ der Form

$$\frac{z(x)^2 - 1}{z(x)^2 + 1} = Ce^{4x}.$$

Wir können noch weiter vereinfachen:

$$z(x)^2 - 1 = Ce^{4x}\left(z(x)^2 + 1\right)$$

und

$$z\left(x\right)^2\left(1 - Ce^{4x}\right) = Ce^{4x} + 1,$$

$$z\left(x\right)^2 = \frac{1 + Ce^{4x}}{1 - Ce^{4x}}.$$

Als explizite Formel für z findet man

$$z(x) = \sqrt{\frac{1 + Ce^{4x}}{1 - Ce^{4x}}} \text{ und } z(x) = -\sqrt{\frac{1 + Ce^{4x}}{1 - Ce^{4x}}}.$$

Für y folgt dann

$$y(x) = x + \sqrt{\frac{1 + Ce^{4x}}{1 - Ce^{4x}}} \text{ und } y(x) = x - \sqrt{\frac{1 + Ce^{4x}}{1 - Ce^{4x}}} \tag{3}$$

und schon vorher gefunden:

$$y(x) = x + 1 \text{ und } y(x) = x - 1.$$

4 Existenzintervall

Diese Funktionsvorschriften in (3) sind derartig, dass man zwei Bedingungen für eine gute Definition von y erkennen kann:

1. Die Wurzel ist nur definiert für nicht negative Zahlen.
2. Der Nenner vom Bruch darf nicht gleich 0 sein.

Die erste Bedingung liefert für $C > 0$, dass $1 - Ce^{4x} \geq 0$ gelten soll und das führt zu

$$x \leq -\frac{1}{4}\log\left(C\right).$$

Für $C < 0$ folgt aus der ersten Bedingung, dass $1 + Ce^{4x} \geq 0$ gelten soll und das führt zu

$$x \leq -\frac{1}{4}\log\left(-C\right).$$

Man kann die beiden zusammenfassen in

$$x \leq -\frac{1}{4}\log\left|C\right|.$$

Die zweite Bedingung gibt nur eine zusätzliche Einschränkung, wenn $C > 0$, nämlich $x \neq -\frac{1}{4}\log\left(C\right)$, denn nur dann kann der Nenner 0 werden.

5 Liste aller Lösungen

Weil $y(x) = z(x) + x$ gilt, sind die Lösungen, die man für y findet, wie folgt:

$$\begin{array}{llll}
i) & & y(x) = x + 1 & \text{für } y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\
ii) & & y(x) = x - 1 & \text{für } y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\
iii) & C < 0: & y(x) = x + \sqrt{\frac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}} & \text{für } y : \left(-\infty, -\frac{1}{4}\log|C|\right] \to \mathbb{R}, \\
iv) & C < 0: & y(x) = x - \sqrt{\frac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}} & \text{für } y : \left(-\infty, -\frac{1}{4}\log|C|\right] \to \mathbb{R}, \\
v) & C > 0: & y(x) = x + \sqrt{\frac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}} & \text{für } y : \left(-\infty, -\frac{1}{4}\log|C|\right) \to \mathbb{R}, \\
vi) & C > 0: & y(x) = x - \sqrt{\frac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}} & \text{für } y : \left(-\infty, -\frac{1}{4}\log|C|\right) \to \mathbb{R}.
\end{array}$$

Hier findet man eine Skizze einiger Lösungen:

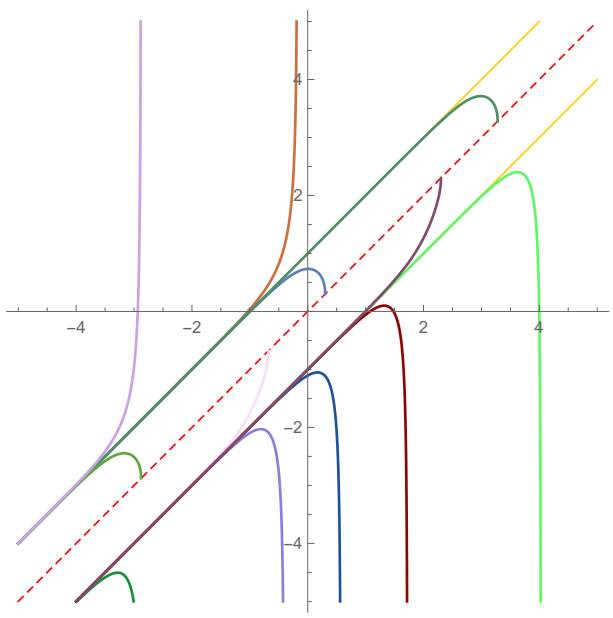


Abbildung 1: Skizze einiger Lösungen: jede Lösung hat eine eigene Farbe. Die gestrichelte ist keine Lösung, sondern zeigt die Stellen, an denen f nicht wohl-definiert ist.

6 Zusätzliche Überlegungen

Mehrere Lösungen existieren nicht auf ganz $\mathbb{R}$, sondern entweder bis $|y(x)| \to \infty$ für $x \uparrow x_0$, oder bis $(x, y(x)) \to (x_0, x_0)$.

Wenn $|y(x)| \to \infty$, dann hat diese Lösung $x \mapsto y(x)$ eine vertikale Asymptote[1]: Entweder gilt

$$\lim_{x \uparrow x_0} y(x) = \infty \text{ oder } \lim_{x \uparrow x_0} y(x) = -\infty.$$

[1]Die Funktion $x \mapsto y(x)$ hat in x_0 eine vertikale Asymptote für $x \downarrow x_0$, wenn

$$\lim_{x \downarrow x_0} y(x) = \infty \text{ oder } \lim_{x \downarrow x_0} y(x) = -\infty.$$

Die Formel $\lim_{x \downarrow x_0} y(x) = \infty$ bedeutet:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \exists \varepsilon > 0 \text{ derart, dass } \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \text{ gilt } f(x) > M.$$

Bei unseren jetzigen Lösungen passiert es nicht, jedoch könnte man an einem linken Rand des Existenzintervalls auch

$$\lim_{x \downarrow x_0} y(x) = \infty \text{ oder } \lim_{x \downarrow x_0} y(x) = -\infty$$

erwarten. Die Lösungen in $v)$ und $vi)$ betrifft dies.

Die zweite Möglichkeit, um das Ende eines Existenzintervalls zu erreichen, passiert hier, wenn die Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ ein Problem hat. Das ist hier der Fall für $y = x$, denn

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (x_0, x_0) \\ x \neq y}} |f(x, y)| = \infty.$$

Dies passiert bei den Lösungen in $iii)$ und $iv)$.

Remark 1 *Die Funktion f aus (1) hat eine Asymptote am Rand ihres Definitionsgebietes $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, t); t \in \mathbb{R}\}$. Nimmt man $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, dann ist f nur definiert für das Kreisinnere $x^2 + y^2 \leq 1$. Lösungen von $y'(x) = \sqrt{1 - x^2 - y(x)^2}$ sind derartig, dass am Rande eines maximalen Existenzintervalls die Lösung den Rand des Kreises erreichen wird.*

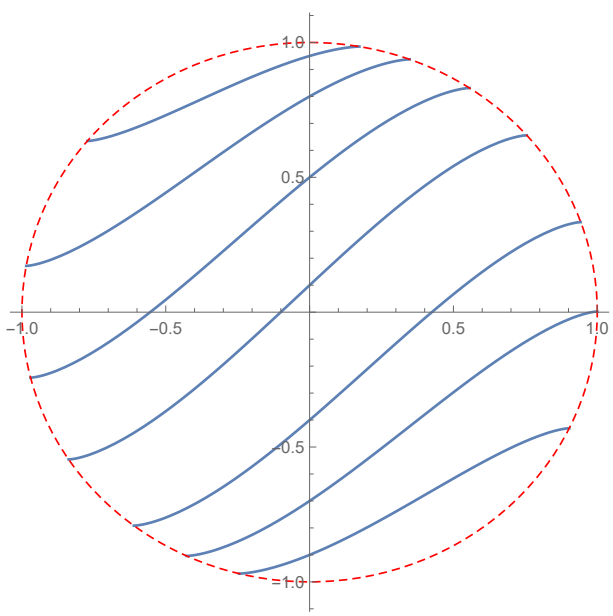


Abbildung 2: Skizze einiger Lösungen von $y'(x) = \sqrt{1 - x^2 - y(x)^2}$