**Prof. Dr. Guido Sweers**
**Inka Schnieders, M.Sc.** **WS 20/21**

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 10.11.2020, um 12 Uhr.

**Aufgabe 1:**[*] In einem Tank mit zwei Öffnungen sind 1000 Liter Wasser enthalten. In dem Wasser sind zu Beginn 100g Salz gelöst. Pro Minute laufen 5 Liter der Salzlösung aus dem Tank und Salzwasser mit 2g Salz pro Liter fließt mit einer Rate von 5 Liter pro Minute in den Tank. Man kann annehmen, dass das Salz im Wasser zu jedem Zeitpunkt gleichmäßig verteilt ist. Stellen Sie ein Anfangswertproblem für die Menge $s(t)$ des Salzes im Tank nach $t$ Minuten auf und lösen sie dieses.

**Lösung 1:** Die Anfangsbedingung ist $s(0) = 100$. Nun bestimmen wir mit welcher Rate der Salzgehalt zunimmt. Es fließen pro Minute 5 Liter Wasser mit 2g Salz pro Liter in den Tank. Jedoch fließen auch wieder 5 Liter des Salzwasser hinaus. Die Dgl wird dann zu

$$s'(t) = 5 \cdot 2 - \frac{5}{1000} s(t),$$

also ist das gesuchte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} s'(t) = 10 - \frac{1}{200} s(t), \\ s(0) = 100. \end{cases}$$

Nun lösen wir dieses Problem. Die Differentialgleichung ist trennbar. Wir finden

$$\frac{200}{2000 - s(t)} s'(t) = 1.$$

Integrieren von 0 bis $t$ liefert

$$\int_0^t \frac{200}{2000 - s(r)} s'(r) dr = \int_0^t 1 dr.$$

Substituieren wir $s(r) = \tilde{s}$ auf der linken Seite, finden wir

$$\int_{100}^{s(t)} \frac{200}{2000 - \tilde{s}} d\tilde{s} = t.$$

Integrieren der linken Seite liefert dann

$$\begin{aligned} -200 \left[\ln |2000 - \tilde{s}|\right]_{100}^{s(t)} &= t \\ \Leftrightarrow 200 \ln |2000 - s(t)| &= 200 \ln(1900) - t \\ \Leftrightarrow |2000 - s(t)| &= e^{\ln(1900) - \frac{t}{200}} \\ \Leftrightarrow s(t) &= \pm e^{\ln(1900) - \frac{t}{200}} + 2000 \end{aligned}$$

[*] Unbewertete Zusatzaufgabe

Damit die Anfangsbedingung erfüllt ist, muss also für die Menge des Salzes folgende Gleichung gelten:

$$s(t) = -1900e^{-\frac{t}{200}} + 2000.$$

**Aufgabe 2** (20 Punkte)**:** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 \min\left\{1, \frac{1}{x(t)^2}\right\}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

**Lösung 2:** Diese Differentialgleichung ist trennbar. Wie in der Vorlesung bestimmen wir die gesuchten Stammfunktionen. Eine Stammfunktion von $g(t) = t^2$ ist $G(t) = \frac{1}{3}t^3$. Eine Stammfunktion von $f(x) = \min\{1, x^{-2}\}^{-1}$ ist

$$H(x) = \int_0^x \min\left\{1, s^{-2}\right\}^{-1} ds = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 & \text{für } x \geq 1, \\ x & \text{für } x \in (-1, 1), \\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 & \text{für } x \leq -1. \end{cases}$$

Es gilt also $H(x(t)) = G(t) + c$. Mit der Anfangsbedingung finden wir

$$H(x(0)) = G(0) + c \Leftrightarrow 0 = c,$$

also $H(x(t)) = G(t)$. Außerdem ist die Funktion $H$ invertierbar mit

$$H^{inv}(y) = \begin{cases} (3y - 2)^{\frac{1}{3}} & \text{für } y \geq 1, \\ y & \text{für } y \in (-1, 1), \\ -(-3y - 2)^{\frac{1}{3}} & \text{für } y \leq -1. \end{cases}$$

Wir finden also insgesamt

$$x(t) = H^{inv}(G(t)) = \begin{cases} (t^3 - 2)^{\frac{1}{3}} & \text{für } t \geq 3^{\frac{1}{3}}, \\ \frac{1}{3}t^3 & \text{für } t \in (-3^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{3}}), \\ -(-t^3 - 2)^{\frac{1}{3}} & \text{für } t \leq -3^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

**Aufgabe 3:** * Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$t^2 + u(t)^2 + t + tu(t)u'(t) = 0. \tag{1}$$

a) Ist diese Differentialgleichung exakt? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass es einen integrierbaren Faktor gibt. Multiplizieren Sie dafür (1) mit einer differenzierbaren Funktion $t \mapsto \mu(t)$ und versuchen Sie diese anschließend passend zu wählen, damit die Differentialgleichung exakt wird.

c) Bestimmen Sie eine Lösung von (1) mit $u(1) = 2$. Das maximale Existenzintervall muss nicht angegeben werden.

**Lösung 3:** a) Nein, die Gleichung ist nicht exakt. Sie hat die Form

$$G(u(t), t)u'(t) + H(u(t), t) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} G(u, t) &= tu, \\ H(u, t) &= t^2 + u^2 + t. \end{aligned}$$

Wenn die Dgl exakt wäre, dann müsste nach einem Lemma aus der Vorlesung gelten, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} G(u, t) = \frac{\partial}{\partial u} H(u, t).$$

Hier finden wir jedoch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(u, t) &= u, \\ \frac{\partial}{\partial u} H(u, t) &= 2u. \end{aligned}$$

Und damit ist die Bedingung nicht erfüllt.

b) Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit einer Funktion $\mu(t)$ und finden wieder

$$\tilde{G}(u(t), t)u'(t) + \tilde{H}(u(t), t) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{G}(u, t) &= tu\mu(t), \\ \tilde{H}(u, t) &= (t^2 + u^2 + t)\mu(t). \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}(u, t) &= u\mu(t) + tu\mu'(t), \\ \frac{\partial}{\partial u} \tilde{H}(u, t) &= 2u\mu(t). \end{aligned}$$

Damit die Bedingung $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{G}(u, t) = \frac{\partial}{\partial u}\tilde{H}(u, t)$ erfüllt ist, muss also gelten:

$$u\mu(t) + tu\mu'(t) = 2u\mu(t).$$

Dies ist äquivalent zu

$$t\mu'(t) = \mu(t).$$

Dies ist eine trennbare Dgl und kann gelöst werden. Wir finden

$$\mu(t) = ct \text{ für } c \in \mathbb{R}.$$

Wir wählen im Folgenden $\mu(t) = t$.

c) Mit dem integrierenden Faktor finden wir die Dgl

$$t^3 + u(t)^2 t + t^2 + t^2 u(t) u'(t) = 0$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{G}(u,t) &= t^2 u,\\ \tilde{H}(u,t) &= t^3 + u^2 t + t^2.\end{aligned}$$

Wir finden also

$$\frac{d}{dt} F(u(t), t) = 0$$

mit

$$F(u,t) = \frac{1}{2} t^2 u^2 + C(t),$$

wobei wir $C$ noch bestimmen müssen. Leiten wir die Gleichung nach $t$ ab, finden wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} t^2 u^2 + C(t)\right) &= \tilde{H}(u,t)\\ \Leftrightarrow tu^2 + C'(t) &= t^3 + u^2 t + t^2\\ C'(t) &= t^3 + t^2,\end{aligned}$$

also $C(t) = \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{3} t^3 + c_1$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$. Wir finden also

$$F(u,t) = \frac{1}{2} t^2 u^2 + \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{3} t^3 + c_1$$

Damit erfüllen die Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung

$$c_2 = F(u(t), t) = \frac{1}{2} t^2 u(t)^2 + \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{3} t^3 + c_1,$$

also

$$u(t) = \pm\sqrt{\frac{c}{t^2} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{2}{3} t} \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Damit $u(1) = 2$ erfüllt ist, muss $c = \frac{31}{6}$ gewählt werden und wir finden

$$u(t) = \sqrt{\frac{31}{6t^2} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{2}{3} t}.$$

Das maximale Existenzintervall ist $(a, b)$ mit $a = 0$, und $b = 1,5333...$

**Aufgabe 4:** *

a) Bestimmen Sie mithilfe der Substitution $u(t) = \frac{x(t)}{1+x(t)^2}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} 4(t^4+t^2+1)x'(t)(1-x(t)^2) = -\frac{t(4t^2+2)}{\sqrt{t^4+t^2+1}}(1+x(t)^2)^2, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Wie versteht man die Differentialgleichung bei $t = 0$?

b) Ist die Lösung eindeutig?

**Lösung 4:** a) Mit der Substitution $u(t) = \frac{x(t)}{1+x(t)^2}$ finden wir

$$u'(t) = x'(t)\frac{1-x(t)^2}{(1+x(t)^2)^2}.$$

Also wird die Differentialgleichung zu

$$4(t^4+t^2+1)u'(t) = -\frac{t(4t^2+2)}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$

Dies wird zu

$$u'(t) = -\frac{1}{4}\frac{t(4t^2+2)}{(t^4+t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Außerdem folgt aus der Anfangsbedingung $x(0) = 1$, dass $u(0) = \frac{1}{2}$. Integrieren liefert

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t u'(s)ds + u(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{2}\frac{s(4s^2+2)}{(s^4+s^2+1)^{\frac{3}{2}}}ds \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{s^4+s^2+1}}\right]_0^t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$x(t) = \frac{1}{2u(t)} \pm \sqrt{\frac{1}{(2u(t))^2} - 1} = \sqrt{t^4+t^2+1} \pm \sqrt{t^4+t^2} = \sqrt{t^4+t^2+1} \pm |t|\sqrt{t^2+1}.$$

Damit bekommen wir vier mögliche Lösungen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sqrt{t^4+t^2+1} + t\sqrt{t^2+1}, \\ x_2(t) &= \sqrt{t^4+t^2+1} - t\sqrt{t^2+1}, \\ x_3(t) &= \sqrt{t^4+t^2+1} - |t|\sqrt{t^2+1}, \\ x_4(t) &= \sqrt{t^4+t^2+1} + |t|\sqrt{t^2+1}, \end{aligned}$$

Das maximale Existenzintervall ist jeweils ganz $\mathbb{R}$, wobei nur die ersten beiden Lösungen differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ sind. $x_3$ und $x_4$ sind nur stetig in $t = 0$. Die einseitigen Ableitungen existieren jeweils in $t = 0$ und somit gilt in beiden Fällen auch

$$\lim_{0 \neq t \to 0} 4(t^4 + t^2 + 1)x'(t)(1 - x(t)^2) = 0$$

und damit kann die linke Seite der Differentialgleichung auch für $x_3$ und $x_4$ in $t = 0$ definiert werden.

b) Nein, die Lösung ist nicht eindeutig. Wir haben bereits in a) mehr als eine Lösung bestimmt.