Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 20/21

Gewöhnliche Differentialgleichungen

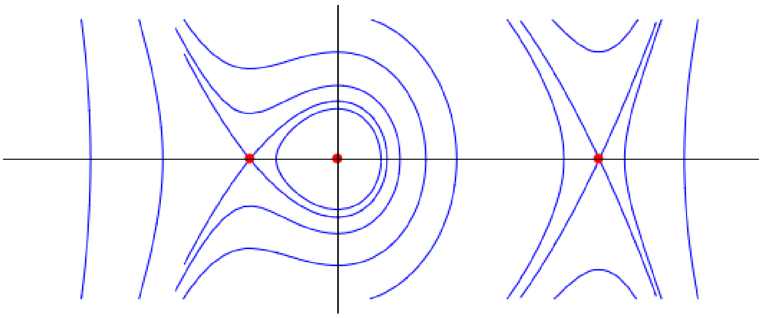
Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 26.01.2021, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (3+3+2+4)**:** Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$u''(t) = u(t)^3 - 2u(t)^2 - 3u(t).$$

Die Phasenebene sieht wie folgt aus:

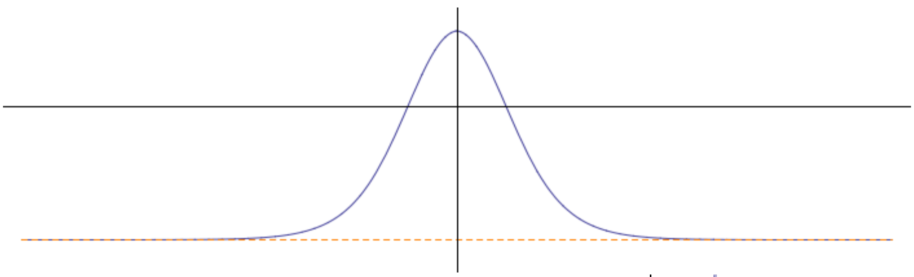


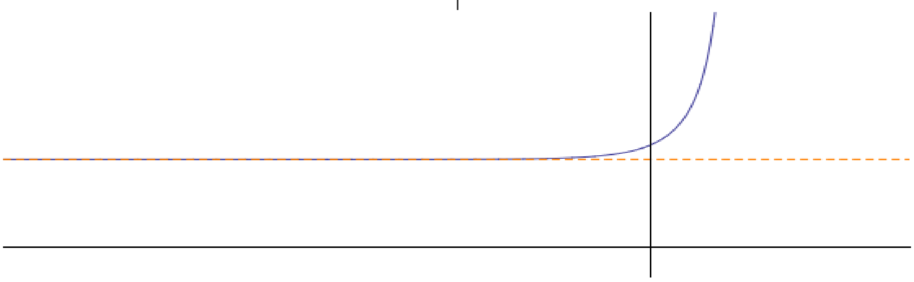
a) Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte.

b) Hat die Gleichung periodische Lösungen? Wenn ja, welche Werte können $(u(0), u'(0))$ in dem Fall annehmen?

c) Zeichnen Sie die Richtungsvektoren an die Trajektorien in der Phasenebene.

d) Im folgenden sehen Sie zwei Lösungen (in blau) mit Asymptoten (in orange) skizziert. Geben Sie die Asymptoten an und ordnen Sie die Lösungen jeweils einer Kurve in der Phasenebene zu.





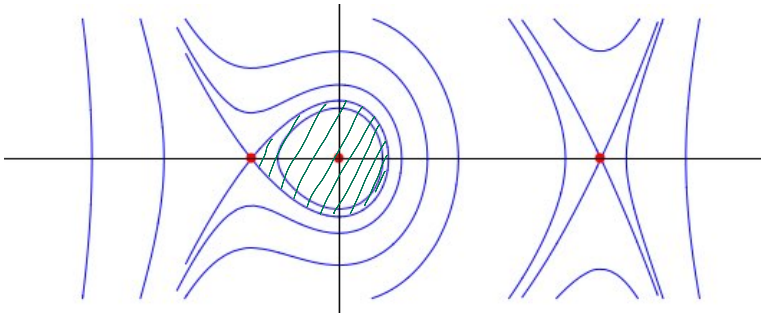
Lösung 1: a) Wenn wir das Problem in ein Problem erster Ordnung umschreiben (mit $v_1(t) = u(t)$ und $v_2(t) = u'(t)$), dann finden wir

$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_1(t)^3 - 2v_1(t)^2 - 3v_1(t) \end{pmatrix}.$$

Da $v_1^3 - 2v_1^2 - 3v_1 = v_1(v_1 + 1)(v_1 - 3)$ finden wir die Gleichgewichtspunkte

$$p_1 = (0,0), \quad p_2 = (-1,0), \quad p_3 = (3,0).$$

b) Die konstanten Lösungen $u \equiv 0$, $u \equiv -1$ und $u \equiv = 3$ sind periodisch. Nicht-konstante periodische Lösungen werden in der Phasenebene genau durch geschlossene Lösungskurven dargestellt (auf der Kurve darf kein Gleichgewichtspunkt liegen). Wir finden also periodische Lösungen, wenn $(u(0), u'(0))$ in der grün schraffierten Menge liegt:



Wir berechnen nun noch die Kurve, die die schraffierte Menge eingrenzt. Setze $V(u(t)) = u'(t)$. Dann folgt

$$V'(u)V(u) = u^3 - 2u^2 - 3u,$$

also

$$\tfrac{1}{2}V(u)^2 = \tfrac{1}{4}u^4 - \tfrac{2}{3}u^3 - \tfrac{3}{2}u^2 + c.$$

Wir suchen die Trajektorie, die durch $(-1,0)$ läuft. Es gilt

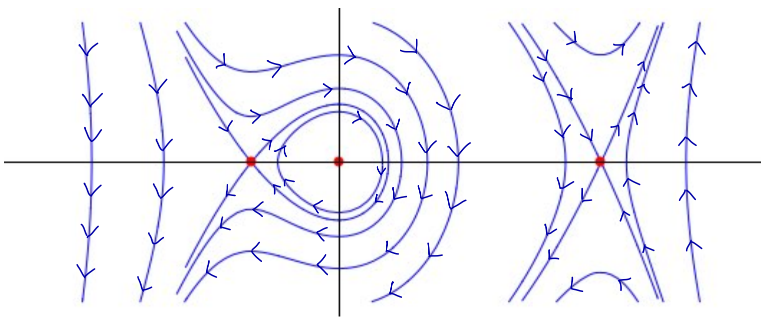
$$0 = \tfrac{1}{2}V(-1)^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{2} + c \Leftrightarrow c = \tfrac{7}{12},$$

also

$$V(u) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}u^4 - \tfrac{4}{3}u^3 - 3u^2 + \tfrac{7}{6}}.$$

Es dürfen also $(u(0, u'(0))$ so gewählt werden, dass die Punkte innerhalb der geschlossenen Kurve liegen.

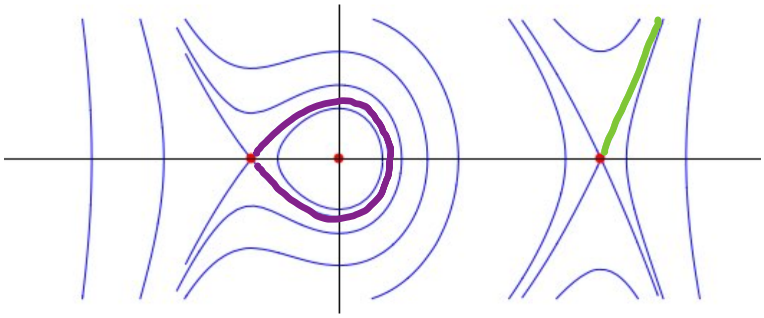
c) Phasenebene mit Richtungsvektoren:



d) Die Asymptote im oberen Bild ist $u \equiv -1$. Die Lösung ist nicht periodisch, also liegt die zugehörige Lösungskurve in der Phasenebene außerhalb der grün-schraffierten Menge. Anhand der Phasenebene sehen wir auch, dass wenn die Lösungskurve außerhalb der schraffierten Menge liegt und auch nicht auf ihrem Rand, dann sind die zugehörigen Lösungen unbeschränkt. Das bedeutet, dass die Lösungskurve auf dem Rand der grün-schraffierten Menge liegt und mithilfe des Vektorfeldes erhalten wir $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = -1$.

Die Asymptote im unteren Bild ist $u \equiv 3$. Anhand der Phasenebene folgt, dass alle Lösungen (außerhalb der grün schraffierten Menge) für $t \to \pm\infty$ unbeschränkt sind außer die Lösungskurve schneidet den Punkt $(3, 0)$. Anhand des Vektorfeldes können wir die passende Kurve finden.

Zuordnung der Lösung zu einer Kruve in der Phasenebene (oberes Bild: lila Kurve, unteres Bild: grüne Kurve):



Aufgabe 2: *

a) Skizzieren Sie die Phasenebene zur Differentialgleichung

$$u''(t) = u(t)(2 - 5u(t)).$$

b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u''(t) = u(t)(2 - 5u(t)), \\ u(0) = \beta, \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

periodisch und für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist sie unbeschränkt? Es kann mit Aufgabenteil a) begründet werden.

Lösung 2: a) Die zwei Gleichgewichtspunkte sind

$$p_1 = (0, 0), \quad p_2 = (\tfrac{2}{5}, 0).$$

Die Trajektorien berechnen wir durch $V(u(t)) = u'(t)$ und

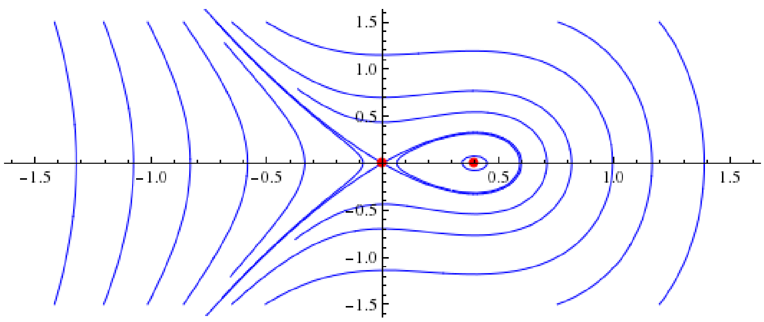
$$V'(u)V(u) = 2u - 5u^2.$$

Wir finden

$$\tfrac{1}{2}V(u)^2 = u^2 - \tfrac{5}{3}u^3 + c,$$

also

$$V(u) = \pm\sqrt{2u^2 - \tfrac{10}{3}u^3 + \tilde{c}}.$$



b) Die Periodischen Lösungen sind genau die Lösungen, die geschlossene Lösungskurven in der Phasenebene darstellen (außer Kurven, die einen Gleichgewichtspunkt schneiden) oder konstante Lösungen sind. Die konstanten Lösungen finden wir für $\beta = 0$ und $\beta = \frac{2}{5}$. Außerdem sind alle Startwerte innerhalb der Menge, die durch die Kurve durch $(0, 0)$ geht, auf einer Lösungskurve für periodische Lösungen. Die Kurve, die $(0, 0)$ schneidet ist:

$$V(u) = \pm\sqrt{2u^2 - \tfrac{10}{3}u^3}.$$

Die beiden Nullstellen von V sind $u = 0$ und $u = \frac{3}{5}$, also erhalten wir periodische Lösungen wenn wir die Werte $\beta \in [0, \frac{3}{5})$ zulassen.

Aufgabe 3 (1+3+0+4+0 Punkte)**:** Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u''(t) = -\cos(u(t)) - u'(t) + \sin(u'(t))$$

a) Schreiben Sie diese Gleichung in ein System erster Ordnung in u und $v = u'$ um.

b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte und geben Sie die Stabilität (instabil, neutral stabil, asymptotisch stabil) der Linerarisierungen an.

c) Zeigen Sie, dass

$$V(u,v) = \tfrac{1}{2}v^2 + \sin(u) + 1$$

eine Lyapunov-Funktion ist. Leiten Sie damit die Stabilität des Systems aus Aufgabenteil a) in den Gleichgewichtspunkten her.

d) Berechnen Sie die Lösungen entlang der roten Trajektorien.

e) Begründen Sie, dass man für jeden Anfangswert $(u(0), u'(0)) \in \mathbb{R}^2$ einen Limes $\lim_{t\to\infty} u(t)$ bestimmen kann.

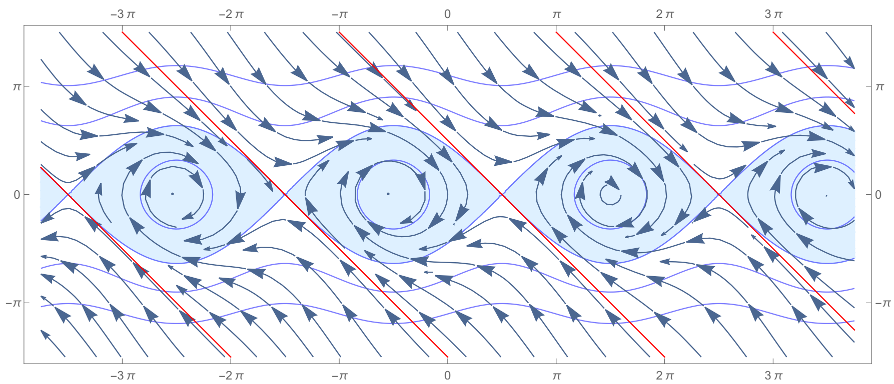


Abbildung 1: In blau sieht man einige Niveaumengen von V und das Vektorfeld. In rot sind einige Trajektorien skizziert.

Lösung 3: a) Wenn wir die Gleichung als System erster Ordnung umschreiben, finden wir

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\cos(u(t)) - v(t) + \sin(v(t)) \end{pmatrix} =: f(u(t), v(t)).$$

b) Gleichgewichtspunkte sind Punkte $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, sodass

$$\begin{cases} 0 &= v, \\ 0 &= -\cos(u) - v + \sin(v). \end{cases}$$

Also sind die Gleichgewichtspunkte gegeben durch

$$(u_k, 0) = (\tfrac{\pi}{2} + \pi k, 0) \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt

$$\nabla f(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin(u) & -1 + \cos(v) \end{pmatrix}.$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ gerade, folgt

$$\nabla f(u_k, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda = \pm 1$ und damit ist das linearisierte System instabil. Für $k \in \mathbb{Z}$ ungerade, folgt

$$\nabla f(u_k, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda = \pm i$ und damit ist das linearisierte System neutral stabil.

c) Die angegebene Funktion ist eine Lyapunotv-Funktion für alle Gleichgewichtspunkte $(u_k, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ungerade. V ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$. Außerdem gilt z.B. für das Definitionsgebiet $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in (\frac{\pi}{2} + \pi(k-1), \frac{\pi}{2} + \pi(k+1)), v \in \mathbb{R}\}$

1. $V(u_k, 0) = 0$,
2. $V(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + \sin(u) + 1 \geq 0$ für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ und sogar $V(u, v) > 0$ für alle $(u, v) \in U \backslash \{(u_k, 0)\}$,
3. $\dot{V}(u, v) = -v^2 + v\sin(v) \leq 0$ für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Damit ist V eine Lyapunov-Funktion. Es folgt, dass das System um die Gleichgewichtspunkte $(u_k, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ungerade asymptotisch stabil ist. Aus Aufgabenteil b) folgt, dass das System um die anderen Gleichgewichtspunkte instabil ist.

d) Die Niveaulinie von V, die die blaue Menge abgrenzt ist $V(u, v) = 2$. Die roten Linien haben die selbe Steigung wie eine der Niveaulinien in den Punkten $(u_k, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gerade. Es gilt

$$V(u, v) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}v^2 + \sin(u) = 1,$$

also

$$v = \pm\sqrt{2 - 2\sin(u)}.$$

Wir suchen also die Geraden, die durch $(u_k, 0) = (\frac{\pi}{2} + \pi k, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gerade gehen und Steigung -1 haben. Wir finden also die roten Geraden:

$$v(u) = -u + \tfrac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ gerade.}$$

Wenn wir $v = -u + \frac{\pi}{2} + \pi k$ in das System aus Aufgabenteil a) einsetzen, finden wir

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u(t) + \frac{\pi}{2} + \pi k \\ -v(t) \end{pmatrix}.$$

Wir finden $v(t) = ce^{-t}$ für $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $u(t) = -ce^{-t} + \frac{\pi}{2} + \pi k$.

e) Da $f(u, v)$ stetig differenzierbar ist, ist das System in Aufgabenteil a) und somit auch das ursprüngliche Problem zweiter Ordnung für jeden Anfangswert $(u(0), u'(0)) \in \mathbb{R}^2$ eindeutig lösbar, die Trajektorien schneiden sich also nicht. Wenn wir uns mit $(u(0), u'(0)) = (u(0), v(0))$ auf einer roten gerade befinden, dann bleiben wir auch für alle $t > 0$ auf dieser Geraden und mit Aufgabenteil d) folgt dann, dass $\lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gerade (und so gewählt, dass sich der Punkt auf der Gerade befindet). Wenn wir uns mit $(u(0), v(0))$ zwischen zwei roten Geraden befinden, dann verlassen wir diesem Bereich auch nicht mehr. Mit der Lyapunov-Funktion aus Aufgabenteil c) kann begründet werden, dass die Lösung dann zu dem jeweiligen Gleichgewichtspunkt konvergiert, also $\lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ungerade (und so gewählt, dass sich der Punkt in dem betrachteten Bereich befindet).

Aufgabe 4: * Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u''(t) = u(t)^3 - 6u(t)^2 + 8u(t). \tag{1}$$

a) Schreiben Sie das Problem in ein System erster Ordnung und bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte.

b) Geben Sie die Stabilität in den Gleichgewichtspunkten an.

c) Addieren Sie auf der rechten Seite der Gleichung in (1) einen Term $h(u, u')$, sodass man immer noch dieselben Gleichgewichtspunkte wie in a) erhält und sich in $(2, 0)$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt befindet.
Hinweis: Denken Sie an Reibung.

Lösung 4: a) Wir definieren $u(t) = v_1(t)$ und $u'(t) = v_2(t)$ und finden damit

$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_1(t)^3 - 6v_1(t)^2 + 8v_1(t) \end{pmatrix}.$$

Da $v_1^3 - 6v_1^2 + 8v_1 = v_1(v_1 - 2)(v_1 - 4)$ finden wir die drei Gleichgewichtspunkte

$$p_1 = (0, 0), \quad p_2 = (2, 0), \quad p_3 = (4, 0).$$

b) Wir linearisieren das System. Definiere

$$f(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1^3 - 6v_1^2 + 8v_1. \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\nabla f(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3v_1^2 - 12v_1 + 8 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\nabla f(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrizen sind $\lambda_1 = -2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 2\sqrt{2}$ (erste und dritte Matrix) bzw. $\lambda_1 = -2i$, $\lambda_2 = 2i$. Nach einem Lemma aus der Vorlesung folgt, dass p_1 und p_3 Sattelpunkte sind und p_2 ein neutral stabiler Punkt.

c) Aus der Vorlesung (Reibung) folgt, dass wir die Differentialgleichung

$$u''(t) = u(t)^3 - 6u(t)^2 + 8u(t) - h(u'(t))$$

betrachten können wobei h differenzierbar sein soll und

$$h(s) > 0 \text{ für } s > 0, h(s) < 0 \text{ für } s < 0 \text{ und } \tfrac{1}{4}h'(0)^2 < 4.$$

Wir können beispielsweise $h(x) = x$ wählen und finden die Dgl

$$u''(t) = u(t)^3 - 6u(t)^2 + 8u(t) - u'(t).$$