Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 20/21**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 02.02.2021, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (2+2+2+3+2)**:** Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t,y) = \begin{cases} -\left(6y - t^3\right)^{2/3} & \text{für } y > \max(\frac{1}{6}t^3, 0), \\ 0 & \text{für } y \leq \max(\frac{1}{6}t^3, 0). \end{cases}$$

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

a) Kann man den Satz von Peano oder Picard-Lindelöf anwenden, um die Existenz mindestens einer Lösung $y : [t_-, t_+] \to \mathbb{R}$ mit $t_- < 0 < t_+$ für das Anfangswertproblem in (1) zu erhalten?

b) Skizzieren Sie das Vektorfeld zu der Differentialgleichung in (1).

c) Begründen Sie mit dem Vektorfeld, dass $y(t) = 0$ für $t \geq 0$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf $[0, \infty)$ ist.

d) Zeigen Sie, dass es ein $b < 0$ gibt, sodass $y(t) = bt^3$ für $t \leq 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems auf $(-\infty, 0]$ ist.

e) Besitzt das Anfangswertproblem in (1) eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung mit Existenzintervall $\mathbb{R}$?

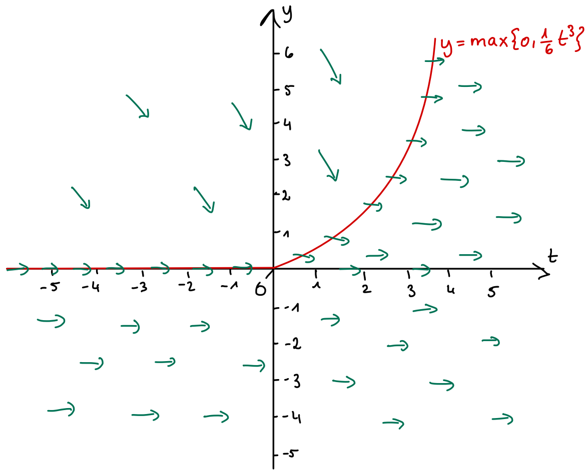
Lösung 1: a) Nein, die Sätze kann man nicht anwenden. Dafür müsste die Funktion f in einer Umgebung von $(0,0)$ stetig sein. Dies ist jedoch nicht der Fall. Für jedes $t_0 < 0$ gilt, dass

$$\lim_{y \uparrow 0} f(t_0, y) = \lim_{y \uparrow 0} 0 = 0$$

und

$$\lim_{y \downarrow 0} f(t_0, y) = \lim_{y \downarrow 0} -(6y - t_0^3)^{2/3} = -(-t_0^3)^{2/3} = -|t_0|^2 \neq 0.$$

b) Eine Skizze des Vektorfeldes:



c) Die Funktion $y(t) \equiv 0$ ist für $t \geq 0$ eine Lösung des Problems, denn der Anfangswert ist erfüllt und $y'(t) = 0 = f(t, y(t))$.

Es ist die einzige Lösung auf $[0, \infty)$. Falls es ein $t_0 > 0$ geben würde mit $y(t_0) < 0$, dann findet man mit dem Vektorfeld, dass $y(t) = y(t_0)$ für alle $t \in [0, t_0]$, also würde $y(0) < 0$ gelten. Falls es ein $t_0 > 0$ geben würde mit $y(t_0) > 0$, dann findet man mit dem Vektorfeld, dass $y(t) \geq y(t_0)$ für alle $t \in [0, t_0]$, also $y(0) > 0$. Der Anfangswert könnte für alle anderen Funktionen nicht erfüllt sein.

d) Für $b < 0$ gilt, dass $y(t) = bt^3 > \max\{\frac{1}{6}t^3, 0\}$ für $t < 0$, also

$$f(t, y(t)) = -(6bt^3 - t^3)^{2/3} = -((6b-1)t^3)^{2/3} = -(1-6b)^{2/3}t^2.$$

Wir müssen also die Existenz eines $b < 0$ zeigen, sodass

$$3bt^2 = y'(t) = f(t, y(t)) = -(1-6b)^{2/3}t^2,$$

also

$$3b = -(1-6b)^{2/3} \quad \Leftrightarrow \quad 27b^3 = -(1-6b)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 27b^3 + 36b^2 - 12b + 1 = 0.$$

Wenn wir zeigen können, dass es ein $b < 0$ gibt, sodass die Gleichung erfüllt ist, dann sind wir fertig. Sei $h(b) = 27b^3 + 36b^2 - 12b + 1$. Es gilt $h(0) = 1 > 0$ und $\lim_{b \to -\infty} h(b) = -\infty$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt, dass es ein $b_0 \in (-\infty, 0)$ gibt, sodass $h(b_0) = 0$. Es gilt also $27b_0^3 + 36b_0^2 - 12b_0 + 1 = 0$ und somit ist $y(t) = b_0 t^3$ eine Lösung des Problems für $t < 0$.

e) Nein, wir finden mindestens zwei Lösungen. Eine Lösung ist die konstante Funktion $y_1 \equiv 0$. Außerdem ist

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \geq 0, \\ bt^3 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

mit $b < 0$ (wie in c) gewählt) eine weitere stetig differenzierbare Lösung.

Aufgabe 2 (5+4 Punkte)**:** Sei $f \in C(\mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ für $x \notin (0,1)$ und $f(x) \neq 0$ für $x \in (0,1)$. Betrachten Sie die Funktionenfolgen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = f(x-n), \qquad\qquad g_n(x) = f\left(\tfrac{n}{n+1}x\right).$$

a) Sind die Folgen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig und beschränkt?

b) Gibt es Teilfolgen $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{g_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ sowie stetige Funktionen $\tilde{f} \in C(\mathbb{R})$ und $g \in C([0,1])$, sodass

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_{n_k}(x) - \tilde{f}(x)| = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |g_{n_m}(x) - g(x)| = 0?$$

Lösung 2: a) Da f außerhalb der kompakten Menge $[0,1]$ gleich Null und stetig ist, existiert $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| =: C < \infty$. Damit folgt auch

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in[n,n+1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\sup_{x\in[0,1]} |g_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| f\left(\frac{n}{n+1}x\right)\right| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also sind beide Funktionenfolgen beschränkt. Nun untersuchen wir noch die gleichgradige Stetigkeit der beiden Folgen:

Sei $\varepsilon > 0$. Da $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ist, folgt aus der Stetigkeit der Funktion auch die gleichmäßige Stetigkeit. Also gibt es ein $\delta_\varepsilon \in (0,1)$, sodass für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| < \delta_\varepsilon$ folgt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Außerdem finden wir damit dann auch für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| < \delta_\varepsilon$ (also auch $\left|\frac{n}{n+1}x - \frac{n}{n+1}y\right| < \delta_\varepsilon$) und alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$|g_n(x) - g_n(y)| = \left| f\left(\frac{n}{n+1}x\right) - f\left(\frac{n}{n+1}y\right)\right| < \varepsilon.$$

Nun untersuchen wir die gleichgradige Stetigkeit der Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Seien auch hier $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta_\varepsilon$. Dann folgt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dass

- Falls $x \leq y \leq n$ (analog $y \leq x \leq n$), dann gilt $|f_n(x) - f_n(y)| = 0 < \varepsilon$,
- Falls $n+1 \leq x \leq y$ (analog $n+1 \leq y \leq x$), dann gilt auch $|f_n(x) - f_n(y)| = 0 < \varepsilon$,
- Falls $n \leq x \leq y \leq n+1$ (analog $n \leq x \leq y \leq n+1$), dann gilt auch $|(x-n)-(y-n)| < \delta_\varepsilon$ und $(x-n), (y-n) \in [0,1]$, also $|f_n(x) - f_n(y)| = |f(x-n) - f(y-n)| < \varepsilon$,
- Falls $x \leq n \leq y \leq n+1$ (analog $y \leq n \leq x \leq n+1$), dann gilt auch $|n-y| < \delta_\varepsilon$, $(y-n) \in [0,1]$ und damit $|f_n(x) - f_n(y)| = |f_n(n) - f_n(y)| = |f(0) - f(y-n)| < \varepsilon$,
- Falls $n \leq x \leq n+1 \leq y$ (analog $n \leq y \leq n+1 \leq x$), dann gilt auch $|x-(n+1)| < \delta_\varepsilon$, $(x-n) \in [0,1]$ und damit $|f_n(x) - f_n(y)| = |f_n(x) - f_n(n+1)| = |f(x-n) - f(1)| < \varepsilon$.

Also ist auch $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig.

b) Da $[0,1]$ eine kompakte Menge ist, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und gleichgradig stetig ist, folgt aus dem Satz von Arzelà-Ascoli, dass es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{g_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ und eine stetige Grenzfunktion $g \in C([0,1])$ gibt.

Es gibt jedoch keine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit stetiger Grenzfunktion $\tilde{f}$. Wenn es so eine Folge geben würde, dann müsste die Folge auch punktweise gegen $\tilde{f}$ konvergieren. Jedoch finden wir für jedes feste $x \in \mathbb{R}$, dass

$$|f_n(x)| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Es kommt also nur die Grenzfunktion $\tilde{f} \equiv 0$ in Frage. Jedoch gilt für alle Teilfolgen $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, dass

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_{n_k}(x) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \neq 0.$$

Aufgabe 3:[*] Begründen Sie, welche der folgenden Anfangswertprobleme eine eindeutige Lösung besitzen.

$$\text{a)} \begin{cases} y'(t) = y(t)^3 - \sqrt[5]{|t|}, \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} y'(t) = \sqrt[5]{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Lösung 3: a) Wir definieren $f(t,y) = y^3 - \sqrt[5]{|t|}$. Dann ist f stetig und erfüllt auf jeder kompakten Menge $[a,b] \times [c,d]$ mit $a < 0 < b$ und $c < 0 < d$ die Lipschitz-Bedingung:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1^3 - y_2^3| \leq \max_{z \in [c,d]} |3z^2||y_1 - y_2| \quad \forall t \in [a,b], y_1, y_2 \in [c,d].$$

Mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgt die Existenz einer eindeutigen Lösung des Problems.

b) Dieses Problem ist nicht eindeutig lösbar. Eine Lösung ist die konstante Funktion $y_1 \equiv 0$. Nimmt man $y(t) \neq 0$ an, dann findet man mit Trennung der Variablen

$$y'(t) \frac{1}{\sqrt[5]{y(t)}} = 1,$$

also folgt für $t > 0$ beispielsweise

$$\int_0^t y'(s) \frac{1}{\sqrt[5]{y(s)}} ds = \int_0^t 1 ds.$$

Daraus folgt

$$\left[\tfrac{5}{4} |y(s)|^{\frac{4}{5}} \right]_0^t = t.$$

Wir erhalten also

$$y(t) = \pm \left(\tfrac{4}{5} t \right)^{\frac{5}{4}}.$$

Also haben wir noch zwei Lösungen

$$y_2(t) = \begin{cases} \pm \left(\frac{4}{5} t \right)^{\frac{5}{4}} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

gefunden. Das Problem ist also nicht eindeutig lösbar. Man kann sogar zeigen, dass es unendlich viele Lösungen gibt.

[*] Unbepunktete Zusatzaufgabe

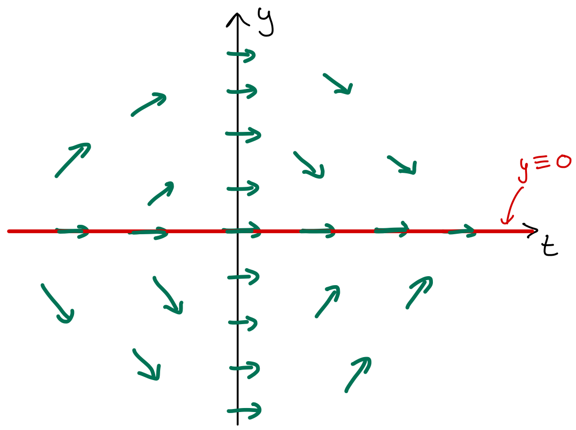
Aufgabe 4: * Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = -t\arctan(\sqrt[3]{y(t)}), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Besitzt das Problem eine eindeutige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort mit dem dazugehörigen Vektorfeld.

Lösung 4: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t,y) = -t\arctan(\sqrt[3]{y})$ ist stetig. Mit dem Existenzsatz von Peano folgt dann, dass es mindestens eine Lösung gibt.

Ja, das Problem besitzt sogar eine eindeutige Lösung. Die Funktion $y \equiv 0$ ist eine Lösung. Dies ist auch die einzige Lösung, denn im Vektorfeld ist ersichtlich:



- falls eine weitere Lösung für ein $t_0 < 0$ positiv ist, dann steigt die Funktion für $t \in (t_0, 0)$. Daraus folgt $y(0) > 0$, was ein Widerspruch ist.
- falls eine Lösung für ein $t_0 < 0$ negativ ist, fällt die Funktion bis $t = 0$ erreicht ist, also gilt $y(0) < 0$, was ein Widerspruch ist.
- falls eine Lösung für ein $t_0 > 0$ positiv ist, folgt mit analoger Begründung, dass $y(0) > 0$, ein Widerspruch.
- falls eine Lösung für ein $t_0 > 0$ negativ ist, folgt $y(0) < 0$, ein Widerspruch.

Es kann also nur die Null-Lösung geben.