Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 20/21**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 17.11.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (6+6 Punkte)**:** Berechnen Sie die orthogonalen Trajektorien zu den jeweiligen Kurvenscharen:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 + \sin(x)^2 = c\}_{c\in\mathbb{R}^+}$,

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = c\}_{c\in\mathbb{R}}$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass eine Stammfunktion von $\sin(x)^{-1}\cos(x)^{-1}$ *gleich* $\ln|\tan(x)|$ *ist.*

Lösung 1: a) Wir nehmen an, dass $y = y(x)$ und schreiben die Differentialgleichung für diese Kurven

$$0 = \frac{d}{dx}\left(y(x)^2 + \sin(x)^2\right) = 2y(x)y'(x) + 2\sin(x)\cos(x).$$

Man ersetze $y(x)$ durch $Y(x)$ und $y'(x)$ durch $-1/Y'(x)$:

$$-\frac{Y(x)}{Y'(x)} + \sin(x)\cos(x) = 0.$$

Dies ist eine trennbare Dgl. Mit dem Hinweis finden wir die Lösungen

$$Y(x) = c\tan(x) \text{ mit } c \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

also

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = c\tan(x)\}_{c\in\mathbb{R}\backslash\{0\}}.$$

b) Wir nehmen an, dass $y = y(x)$ und schreiben die Differentialgleichung für diese Kurven

$$0 = \frac{d}{dx}(xy(x)) = y(x) + xy'(x).$$

Man ersetze $y(x)$ durch $Y(x)$ und $y'(x)$ durch $-1/Y'(x)$:

$$Y(x)Y'(x) = x.$$

Diese Dgl löst man und findet

$$Y(x)^2 = x^2 + \tilde{c} \text{ mit } \tilde{c} \in \mathbb{R},$$

also sind die orthogonalen Trajektorien

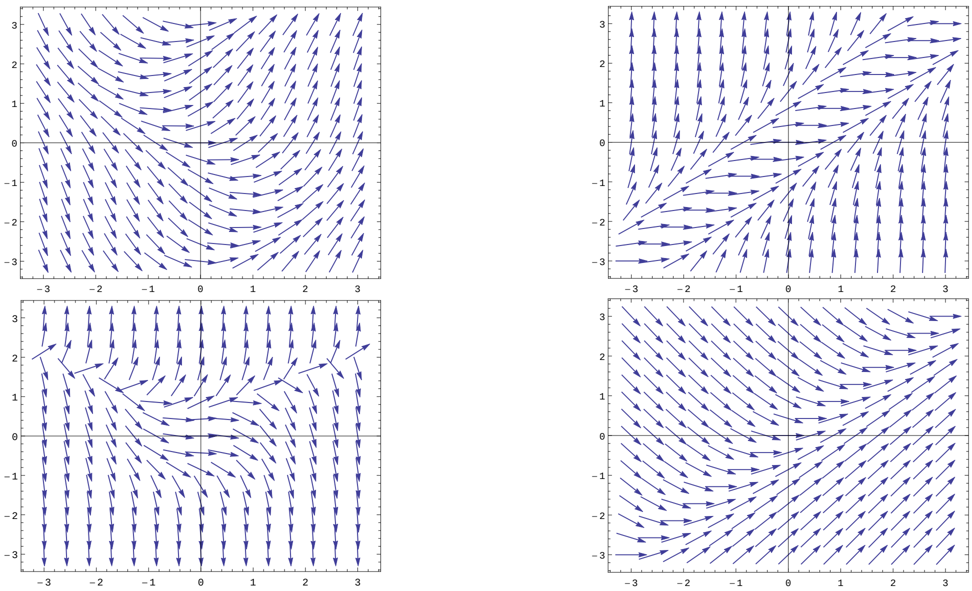
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - x^2 = c\}_{c\in\mathbb{R}}.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)**:** Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit

a) $f(x, y) = x + \sin(y)$ b) $f(x, y) = y^3 - x^2$

c) $f(x, y) = \arctan(x - y)$ d) $f(x, y) = (x - y)^2$

Welches Vektorfeld gehört zu welcher Differentialgleichung?



Lösung 2: Wir betrachten die Punkte $(-2, 0)$ und $(2, 0)$ und finden

	$f(-2, 0)$	$f(2, 0)$
a)	-2	2
b)	-4	-4
c)	$\arctan(-2) \approx -1,107$	$\arctan(2) \approx 1,107$
d)	4	4

Durch die Vorzeichen können wir bereits zwei Bilder eindeutig zuordnen. Wir finden, dass d) zu dem Bild oben rechts gehört und b) zu dem Bild unten links. Um die anderen beiden Bilder zuzuordnen schauen wir uns noch die Auswertung von f in $(0, -2)$ an. Für c) gilt $f(0, -2) \approx 1,107 > 0$, also können wir das Bild unten rechts zuordnen. Außerdem gilt für a), dass $f(0, -2) \approx -0,909 < 0$ und wir können das Bild oben links zuordnen.

Aufgabe 3:[*] Zeigen Sie, dass falls es zwei Lösungen $y_1, y_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ der Probleme

$$\begin{cases} y_1'(t) = \frac{t+y_1(t)}{1+y_1(t)^2}, \\ y_1(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t) = \frac{t+y_2(t)}{1+y_2(t)^2}, \\ y_2(0) = 2 \end{cases}$$

gibt, dass dann

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq e^{3t} \text{ für } t \in [0,1].$$

Lösung 3: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t,y) = \frac{t+y}{1+y^2}.$$

Dann gilt für alle $t \in [0,1]$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\right| = \left|\frac{1-y^2-2ty}{(1+y^2)^2}\right| \leq \frac{1+y^2+2|y|}{(1+y^2)^2} \leq \frac{3(1+y^2)}{(1+y^2)^2} = \frac{3}{1+y^2} \leq 3.$$

Also folgt

$$|f(t,\xi) - f(t,\eta)| \leq 3|\xi - \eta| \text{ für } t \in [0,1] \text{ und } \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

Mit dem Korollar über die Stetigkeit bezüglich der Anfangswerte (Korollar 2.17) finden wir

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq e^{3t}|1-2| = e^{3t}.$$

[*]Unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 4: * Zeigen Sie, dass es höchstens eine stetig differenzierbare Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = |y(t)| + \arctan(y(t)^4 + t^2) + e^{-t^2}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

gibt und, dass für diese Lösung die Abschätzung

$$y(t) \leq \tfrac{2+\pi}{2} e^t - \tfrac{2+\pi}{2}$$

für $t \geq 0$ erfüllt ist.
Hinweis: Vergleichen Sie mit $x'(t) = |x(t)| + \frac{\pi}{2} + 1$.

Lösung 4: Sei

$$f(t, y) = |y| + \arctan(y^4 + t^2) + e^{-t^2}$$

und $M \in \mathbb{R}^+$. Es gilt

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} \arctan(y^4 + t^2) \right| = \left| \frac{4y^3}{1 + (y^4 + t^2)^2} \right| \leq 4|y|^3 \leq 4M^3 \text{ für alle } t \geq 0, y \in [-M, M].$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} |f(t, y) - f(t, z)| &= \big| |y| + \arctan(y^4 + t^2) - |z| - \arctan(z^4 + t^2) \big| \\ &\leq |y - z| + 4M^3 |y - z| = (1 + 4M^3)|y - z| \text{ für alle } t \geq 0, y, z \in [-M, M]. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt mit einem Korollar (Korollar 2.15) aus der Vorlesung.

Für die Abschätzung verwenden wir das Theorem über den Vergleich von Lösungen (Theorem 2.12). Dafür Lösen wir zunächst

$$\begin{cases} x'(t) = |x(t)| + \frac{\pi}{2} + 1 & \text{für } t > 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Da eine Lösung für $t \geq 0$ monoton steigend ist (da $x' > 0$) und $x(0) = 0$ erfüllt, gilt $x(t) = |x(t)|$ für $t \geq 0$. Wir suchen also nach einer positiven Funktion, die $x'(t) = x(t) + \frac{\pi}{2} + 1$ erfüllt. Dies ist eine trennbare Differentialgleichung:

$$\frac{x'(t)}{x(t) + 1 + \frac{\pi}{2}} = 1.$$

Wir finden

$$\ln |x(t) + 1 + \tfrac{\pi}{2}| = t + c \text{ mit } c \in \mathbb{R},$$

also

$$x(t) + 1 + \tfrac{\pi}{2} = \pm e^c e^t.$$

Eine Lösung hat also die Form

$$x(t) = \tilde{c} e^t - 1 - \tfrac{\pi}{2}$$

Mit der Anfangsbedingung erhalten wir

$$x(t) = \frac{2+\pi}{2}e^t - \frac{2+\pi}{2}.$$

Wir definieren

$$g(t,y) = |y| + \frac{\pi}{2} + 1.$$

Dann finden wir

$$g(t,\eta) - f(t,\xi) = -|\xi| - \arctan(\xi^4 + t^2) - e^{-t^2} + |\eta| + \tfrac{\pi}{2} + 1 \geq -|\xi| + |\eta| \geq -|\xi - \eta|$$

für alle $t \geq 0$ und $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Also folgt

$$y(t) \leq x(t) = \frac{2+\pi}{2}e^t - \frac{2+\pi}{2} \text{ für } t \geq 0.$$

Aufgabe 5:* Sei $a \in \mathbb{R}$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = t\sqrt[5]{y(t)^2}, \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Lösung 5: Dies ist eine trennbare Dgl. Wir bemerken, dass die konstante Funktion $y \equiv 0$ eine Lösung ist.

Wenn wir $y(t) \neq 0$, annehmen, dann können wir durch $\sqrt[5]{y(t)^2}$ teilen und finden die Dgl

$$y'(t)|y(t)|^{-\frac{2}{5}} = t.$$

Eine Stammfunktion von $g(t) = t$ ist $G(t) = \frac{1}{2}t^2$ und von $f(y) = |y|^{-\frac{2}{5}}$ ist

$$F(y) = \begin{cases} \frac{5}{3}y^{\frac{3}{5}} & \text{für } y \geq 0, \\ -\frac{5}{3}(-y)^{\frac{3}{5}} & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Wir finden also

$$F(y(t)) = G(t) + c \text{ für ein } c \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion F ist strikt monoton steigend, also existiert eine Inverse:

$$F^{\text{inv}}(z) = \begin{cases} (\frac{3}{5}z)^{\frac{5}{3}} & \text{für } z \geq 0, \\ -(-\frac{3}{5}z)^{\frac{5}{3}} & \text{für } z < 0. \end{cases}$$

Wir finden also eine Lösung

$$y(t) = \begin{cases} (\frac{3}{10}t^2 + \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t^2 \geq -\frac{10}{3}\tilde{c}, \\ -(-\frac{3}{10}t^2 - \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t^2 < -\frac{10}{3}\tilde{c}. \end{cases}$$

Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir können nun unendlich viele Lösungen erhalten, indem wir Kombinationen der konstanten Nulllösung und der berechneten Lösung (mithilfe der Trennung der Variablen) betrachten. Lösungen des Anfangswertproblems sind beispielsweise:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 0, \\ y_2(t) &= \begin{cases} (\frac{3}{10}t^2 - \frac{3}{10}a^2)^{\frac{5}{3}} & \text{für } t^2 \geq a^2, \\ -(-\frac{3}{10}t^2 + \frac{3}{10}a^2)^{\frac{5}{3}} & \text{für } t^2 < a^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Außerdem findet man, dass für $\tilde{c} \leq -\frac{3}{10}a^2$ auch

$$y_3(t) = \begin{cases} (\frac{3}{10}t^2 + \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t^2 \geq -\frac{10}{3}\tilde{c}, \\ 0 & \text{für } t^2 < -\frac{10}{3}\tilde{c} \end{cases}$$

Lösungen sind.

Des weiteren finden wir (abhängig von a):

$$y_4(t) = \begin{cases} (\frac{3}{10}t^2 + \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t \geq \sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}}, \\ 0 & \text{für } t < \sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}} \end{cases}$$

für $a \leq 0$ und $\tilde{c} \leq 0$,

$$y_5(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t > -\sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}} \\ (\frac{3}{10}t^2 + \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t \leq -\sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}} \end{cases}$$

für $a \leq 0$ und $\tilde{c} \leq -\frac{3}{10}a^2$,

$$y_6(t) = \begin{cases} (\frac{3}{10}t^2 + \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t \leq -\sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}}, \\ 0 & \text{für } t > -\sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}} \end{cases}$$

für $a \geq 0$ und $\tilde{c} \leq 0$,

$$y_7(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}} \\ (\frac{3}{10}t^2 + \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t \geq \sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}} \end{cases}$$

für $a \geq 0$ und $\tilde{c} \leq -\frac{3}{10}a^2$,

$$y_8(t) = \begin{cases} -(-\frac{3}{10}t^2 - \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t^2 < -\frac{10}{3}\tilde{c}, \\ 0 & \text{für } t^2 \geq -\frac{10}{3}\tilde{c} \end{cases}$$

für $a \neq 0$ und $\tilde{c} \geq -\frac{3}{10}a^2$,

$$y_9(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t > \sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}} \\ -(-\frac{3}{10}t^2 - \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t^2 < -\frac{10}{3}\tilde{c}, \\ (\frac{3}{10}t^2 + \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t \leq -\sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}} \end{cases}$$

für $a > 0$ und $\tilde{c} \geq -\frac{3}{10}a^2$,

$$y_{10}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -\sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}} \\ -(-\frac{3}{10}t^2 - \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t^2 < -\frac{10}{3}\tilde{c}, \\ (\frac{3}{10}t^2 + \tilde{c})^{\frac{5}{3}} & \text{für } t \geq \sqrt{-\frac{10}{3}\tilde{c}} \end{cases}$$

für $a < 0$ und $\tilde{c} \geq -\frac{3}{10}a^2$.

Man kann sich auch noch weitere Kombinationen überlegen.