Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 20/21**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 24.11.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**:** Berechnen Sie die Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Hinweis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Lösung 1: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung des Problems gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \exp(At) \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{pmatrix}, \text{ mit } \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3 \in \mathbb{R},$$

beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \varphi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \varphi_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \varphi_3 \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte der Matrix sind und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die dazugehörigen Eigenvektoren. Mithilfe des Hinweises können wir die Eigenwerte und Eigenvektoren direkt angeben: Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -1.$$

und die dazugehörigen Eigenvektoren

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als allgemeine Lösung des Systems erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ -2c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{-t} \\ 4c_1 e^{-2t} + 4c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

für $c_1, c_2 c_3 \in \mathbb{R}$.

Alternativ findet man mit dem Hinweis und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 16 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

dass

$$\begin{aligned} \exp(At) &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 16 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} & \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} & \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{2t} \\ e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} \\ -2e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} & e^{2t} - e^{-2t} & e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} & \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} & \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{2t} \\ e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} \\ -2e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} & e^{2t} - e^{-2t} & e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{pmatrix}$$

für $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2:* Geben Sie die Lösung an von

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{22}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix $A \in M^{3\times 3}(\mathbb{R})$ reell ist und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung 2: Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = c_1\varphi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\varphi_2 e^{\lambda_2 t} + c_3\varphi_3 e^{\lambda_3 t} \text{ für } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte der Matrix A sind und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die zugehörigen Eigenvektoren sind (für den Fall, dass die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt). Durch die Eigenschaften haben wir gegeben, dass $\lambda_1 = 2$ ein Eigenwert mit Eigenvektor $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist. Ein zweiter Eigenwert ist $\lambda_2 = -3$ mit Eigenvektor $\varphi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Außerdem ist der Vektor für die Anfangsbedingung eine Linearkombination von φ_1 und φ_2. Wir finden

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{22}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix} = \frac{7}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{7}{5}\varphi_1 + \frac{1}{5}\varphi_2.$$

Demnach ist die Lösung des Problems

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = e^{2t}\frac{7}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{-3t}\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ \frac{21}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t} \\ -\frac{14}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

*Unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 3: * Seien $A = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$. Begründen Sie jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

a) $AB = BA$,

b) $e^A e^B = e^B e^A$,

c) $e^A e^B = e^{A+B}$,

d) $e^{tA} e^{tB} = e^{tB} e^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lösung 3: a) Dies können wir nachrechnen. Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & \pi^2 \\ \pi^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & -\pi^2 \\ -\pi^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichheit ist also nicht erfüllt.

b) Wir berechnen e^A und e^B. Es folgt direkt mit den Rechenregeln aus der Vorlesung

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\pi} & 0 \\ 0 & e^{-\pi} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix B sind $\lambda_1 = i\pi$ und $\lambda_2 = -i\pi$. Die Eigenvektoren sind

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Also finden wir

$$e^B = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} -e^{\pi} & 0 \\ 0 & -e^{-\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{\pi} & 0 \\ 0 & -e^{-\pi} \end{pmatrix} = e^B e^A.$$

c) Es gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ -\pi & -\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{\pi} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & -\pi \end{pmatrix}$$

und damit

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{\pi} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & -\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi + 1 & \pi \\ -\pi & 1 - \pi \end{pmatrix}$$

Demnach gilt $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

d) Nein, die Gleichheit gilt nicht für alle $t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\pi t} & 0 \\ 0 & e^{-\pi t} \end{pmatrix}$$

und

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\pi t} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix},$$

also

$$e^{At}e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{\pi t}\cos(\pi t) & e^{\pi t}\sin(\pi t) \\ -e^{-\pi t}\sin(\pi t) & e^{-\pi t}\cos(\pi t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^{\pi t}\cos(\pi t) & e^{-\pi t}\sin(\pi t) \\ -e^{\pi t}\sin(\pi t) & e^{-\pi t}\cos(\pi t) \end{pmatrix} = e^{Bt}e^{At}$$

für manche t ($t \notin \mathbb{Z}$).

Aufgabe 4 (10+0 Punkte)**:** Sind die folgenden Funktionen Lösung eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten? Wenn ja, geben Sie das System an.

a) $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 3\cos(t) + 4\sin(t) & 5\sin(t) \\ -5\sin(t) & 3\cos(t) - 4\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

b) $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 4\cos(t) + 3\sin(t) & 3\sin(t) \\ -2\sin(t) & 4\cos(t) - 3\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Lösung 4: Wenn es Lösungen zu einem linearen Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten sind, dann muss es $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ geben, sodass für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

gilt. Da $\mathbb{R}^2$ durch die Einheitsvektoren aufgespannt wird, müssen wir nur überprüfen, ob wir für $(c_1, c_2) = (1, 0)$ und $(c_1, c_2) = (0, 1)$ dieselbe Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ erhalten.

a) Ja, die Funktion ist Lösung eines linearen Gleichungssystems. Setzen wir $(c_1, c_2) = (1, 0)$, dann finden wir

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 3\cos(t) + 4\sin(t) \\ -5\sin(t) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \sin(t) + 7\cos(t) \\ -5\cos(t) - 5\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 3a\cos(t) + (4a - 5b)\sin(t) \\ 3c\cos(t) + (4c - 5d)\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Mit Koeffizientenvergleich finden wir $1 = 4a - 5b$, $7 = 3a$, $-5 = 4c - 5d$ und $-5 = 3c$. Die Lösung ist

$$a = \tfrac{7}{3}, \quad b = \tfrac{5}{3}, \quad c = -\tfrac{5}{3}, \quad d = -\tfrac{1}{3}.$$

Setzen wir $(c_1, c_2) = (0, 1)$, dann finden wir

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 5\sin(t) \\ 3\cos(t) - 4\sin(t) \end{pmatrix}$$

Dann folgt

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 5\sin(t) + 5\cos(t) \\ -1\cos(t) - 7\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} (5a - 4b)\sin(t) + 3b\cos(t) \\ (5c - 4d)\sin(t) + 3d\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Dann finden wir $5a - 4b = 5$, $3b = 5$, $5c - 4d = -7$ und $3d = -1$ und daraus folgt

$$a = \tfrac{7}{3}, \quad b = \tfrac{5}{3}, \quad c = -\tfrac{5}{3}, \quad d = -\tfrac{1}{3}.$$

Das Gleichungssystem ist also

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

b) Nein. Wir können analog zu a) vorgehen. Setzen wir $(c_1, c_2) = (1, 0)$, dann finden wir

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 4\cos(t) + 3\sin(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Wir finden

$$a = \tfrac{7}{4}, \quad b = \tfrac{25}{8}, \quad c = -\tfrac{1}{2}, \quad d = \tfrac{1}{4}.$$

Setzen wir $(c_1, c_2) = (0, 1)$, dann gilt

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 3\sin(t) \\ 4\cos(t) - 3\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Wir finden

$$a = \tfrac{37}{12}, \quad b = \tfrac{3}{4}, \quad c = -\tfrac{25}{12}, \quad d = \tfrac{1}{4}.$$

Wir finden also kein Gleichungssystem erster Ordnung.