Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 20/21

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 4

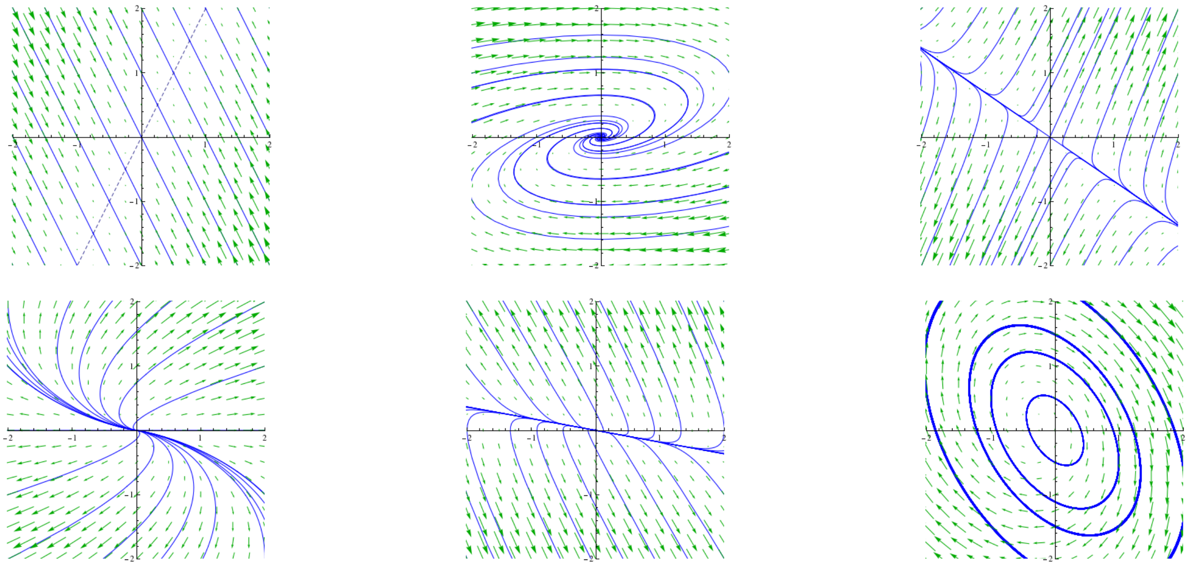
Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 01.12.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**:** Betrachten Sie das System $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, wobei A eine der folgenden Matrizen ist:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$

Ordnen Sie jedem System das passende Bild zu und geben Sie die Klassifizierung an. Die blauen Kurven stellen Lösungskurven dar und die grünen Pfeile sind das Richtungsfeld.



Lösung 1: Wir bestimmen die Eigenwerte der Matrizen. Wir finden für die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} + bc - ad} & \text{falls } \frac{(a+d)^2}{4} + bc - ad \geq 0, \\ \frac{a+d}{2} \pm i\sqrt{-\frac{(a+d)^2}{4} - bc + ad} & \text{falls } \frac{(a+d)^2}{4} + bc - ad < 0. \end{cases}$$

Also folgt mit Kapitel 4.3 aus der Vorlesung

	λ_1	λ_2	Klassifizierung	Zuordnung
a)	$\frac{1}{2}(5+\sqrt{33})$	$\frac{1}{2}(5-\sqrt{33})$	Sattelpunkt	oben rechts
b)	$-1+2i$	$-1-2i$	stabiler Strudel	oben mitte
c)	$3+\sqrt{6}$	$3-\sqrt{6}$	instabiler Knoten	unten mitte
d)	1	1	entarteter instabiler Knoten	unten links
e)	-4	0	neutral stabiler Knoten	oben links
f)	$2i\sqrt{5}$	$-2i\sqrt{5}$	Zentrum	unten rechts

Aufgabe 2 (5+5+4 Punkte)**:** Finden Sie alle Lösungen zu den folgenden linearen inhomogenen Systemen:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

mit

a) $\vec{f}_a(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ b) $\vec{f}_b(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{f}_c(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-2t} - 2e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$

Hinweis: Suchen Sie eine spezielle Lösung mit gezieltem Raten, d.h. versuchen Sie $\vec{x}(t) = \vec{c}e^t$ in a) und $\vec{x}(t) = \vec{p}(t)e^{-2t}$ in b), wobei $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{p}$ Polynome ersten Grades enthält.

Lösung 2: Wir bestimmen zunächst die homogene Lösung. Dafür berechnen wir die Eigenwerte der Matrix. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -9 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = (1-\lambda-3)(1-\lambda+3) = (-2-\lambda)(4-\lambda).$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 4$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } \varphi_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung des homogenen Problems

$$\vec{x}_{\text{hom}}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{4t} \\ c_1 e^{-2t} + c_2 e^{4t} \end{pmatrix} \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

a) Als spezielle Lösung versuchen wir $\vec{x}_a(t) = \begin{pmatrix} d_1 e^t \\ d_2 e^t \end{pmatrix}$. Wir finden mit der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} d_1 e^t \\ d_2 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 e^t - 9d_2 e^t \\ -d_1 e^t + d_2 e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} d_1 &= d_1 - 9d_2 - 1 \\ d_2 &= -d_1 + d_2 + 1, \end{aligned}$$

also $d_2 = -\frac{1}{9}$ und $d_1 = 1$. Eine spezielle Lösung ist also

$$\vec{x}_a(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -\frac{1}{9} e^t \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des inhomogenen Systems ist demnach

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_{\text{hom}}(t) + \vec{x}_a(t) = \begin{pmatrix} 3c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{4t} + e^t \\ c_1 e^{-2t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{9} e^t \end{pmatrix}.$$

b) Als spezielle Lösung versuchen wir $\vec{x}_b(t) = \begin{pmatrix} (d_1 + d_2 t)e^{-2t} \\ (d_3 + d_4 t)e^{-2t} \end{pmatrix}$. Genau wie in Aufgabenteil a) finden wir mit der Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} d_2 - 2d_1 &= 1 + d_1 - 9d_3 \\ -2d_2 &= d_2 - 9d_4 \\ d_4 - 2d_3 &= -d_1 + d_3 \\ -2d_4 &= -d_2 + d_4 \end{aligned}$$

Es kann also beispielsweise $d_1 = -\frac{1}{6}$, $d_2 = \frac{1}{2}$, $d_3 = 0$ und $d_4 = \frac{1}{6}$ gewählt werden. Eine spezielle Lösung ist demnach

$$\vec{x}_b(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} \\ \frac{1}{6}te^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des inhomogenen Problems ist

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_{\text{hom}}(t) + \vec{x}_b(t) = \begin{pmatrix} 3c_1e^{-2t} - 3c_2e^{4t} - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} \\ c_1e^{-2t} + c_2e^{4t} + \frac{1}{6}te^{-2t} \end{pmatrix}.$$

c) Man kann als spezielle Lösung eine Linearkombination von $\vec{x}_a$ und $\vec{x}_b$ verwendet. Man findet $\vec{f}_c = 2\vec{f}_a + 3\vec{f}_b$, also ist auch $\vec{x}_c(t) = 2\vec{x}_a + 3\vec{x}_b$ eine spezielle Lösung des Systems. Damit ist die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}_{\text{hom}}(t) + 2\vec{x}_a(t) + 3\vec{x}_b(t) \\ &= \begin{pmatrix} 3c_1e^{-2t} - 3c_2e^{4t} + 2e^t - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}te^{-2t} \\ c_1e^{-2t} + c_2e^{4t} - \frac{2}{9}e^t + \frac{1}{2}te^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:[*] Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \notin \{(c, 0) \in \mathbb{R}^2; c \geq 0\}$. Betrachten Sie das System

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

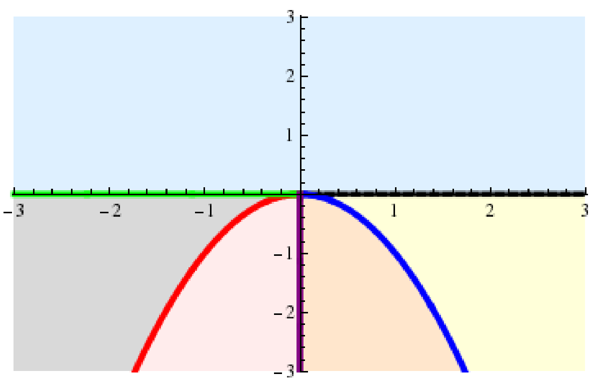
Geben Sie mittels einer Skizze in der (a, b)-Ebene an, für welche (a, b) das System einen stabilen, instabilen, entartet stabilen, entartet instabilen oder neutral stabilen Knoten, einen Sattelpunkt, einen stabilen oder instabilen Strudel oder ein Zentrum besitzt.

Lösung 3: Man kann die Eigenwerte der Matrix berechnen und findet

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} a \pm \sqrt{a^2 + b} & \text{falls } a^2 \geq -b, \\ a \pm i\sqrt{-b - a^2} & \text{falls } a^2 < -b. \end{cases}$$

Nun müssen einige Fälle unterschieden werden:

- Wir nehmen an, dass $a^2 > -b$:
  - $a > 0, b > 0$: $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ **Sattelpunkt** (hellblau)
  - $a > 0, b < 0$: $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ **Instabiler Knoten** (gelb)
  - $a < 0, b > 0$: $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ **Sattelpunkt** (hellblau)
  - $a < 0, b < 0$: $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ **Stabiler Knoten** (grau)
  - $a < 0, b = 0$: $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ **Neutral stabiler Knoten** (grün)
  - $a = 0, b > 0$: $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ **Sattelpunkt** (hellblau)
- Angenommen $a^2 = -b$ (und demnach auch $b < 0$):
  - $a > 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ **Entartet instabiler Knoten** (dunkelblau)
  - $a < 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ **Entartet stabiler Knoten** (rot)
- Angenommen $a^2 < -b$ (und demnach auch $b < 0$):
  - $a = 0$: $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0,\ \mathrm{Im}(\lambda_i) \neq 0 \Rightarrow$ **Zentrum** (lila)
  - $a > 0$: $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0,\ \mathrm{Im}(\lambda_i) \neq 0 \Rightarrow$ **Instabiler Strudel** (orange)
  - $a < 0$: $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0,\ \mathrm{Im}(\lambda_i) \neq 0 \Rightarrow$ **Stabiler Strudel** (rosa)



[*]Unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 4: * Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

a) $\det(A - \lambda I) = \lambda^4 + \lambda^3 + 25\lambda^2 + 25\lambda$,

b) $\det(A - \lambda I) = \lambda^6 - 3\lambda^5 + 5\lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda$.

Ist das System $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ stabil?

Lösung 4: a) Sei $f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 25\lambda^2 + 25\lambda$. Wir berechnen die Eigenwerte. Ein Eigenwert ist $\lambda_1 = 0$. Durch Ausprobieren findet man auch $\lambda_2 = -1$. Außerdem finden wir

$$\frac{f(\lambda)}{\lambda(1+\lambda)} = \lambda^2 + 25.$$

Die beiden weiteren Nullstellen von f sind also $\lambda_3 = 5i$ und $\lambda_4 = -5i$. Die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte sind jeweils gleich 1. Mit einem Lemma aus der Vorlesung folgt, dass das System dann stabil ist.

b) Sei $f(\lambda) = \lambda^6 - 3\lambda^5 + 5\lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda$. Man findet, dass $f(1) = -2 < 0$ und $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = \infty$. Mit der Stetigkeit von f und dem Zwischenwertsatz folgt, dass es ein $\lambda > 0$ gibt, sodass $f(\lambda) = 0$. Es gibt also mindestens einen positiven Eigenwert. Das System ist also instabil.