Prof. Dr. Guido Sweers **WS 20/21**
Inka Schnieders, M.Sc.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 08.12.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} 3x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Picard-Iterationen y_1, y_2 und y_3, wenn Sie mit der konstanten Funktion

$$y_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

beginnen.

b) Verwenden Sie das Euler-Vorwärts-Verfahren, um eine Näherung für die exakte Lösung in $x = \frac{3}{2}$ zu bekommen. Dabei soll die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ verwendet werden.

Lösung 1: a) Wir haben die Funktion

$$y_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir finden

$$y_{n+1}(x) = y_0(x) + \int_0^x \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} y_n(s) + \begin{pmatrix} 3s \\ 0 \end{pmatrix} \right) ds.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3s \\ 0 \end{pmatrix} \right) ds \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 2 + 3s \\ s^2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x + \frac{3}{2}x^2 \\ \frac{1}{3}x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + \frac{3}{2}x^2 \\ \frac{1}{3}x^3 + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Und analog finden wir auch

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s + \frac{3}{2}s^2 \\ \frac{1}{3}s^3 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3s \\ 0 \end{pmatrix} \right) ds \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 5s + \frac{3}{2}s^2 + \frac{2}{3}s^3 + 2 \\ \frac{1}{3}s^5 + s^2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + 2x \\ \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{3}x^3 + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Genauso folgt auch

$$
\begin{aligned}
y_3(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2}s^2 + \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{6}s^4 + 2s \\ \frac{1}{18}s^6 + \frac{1}{3}s^3 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3s \\ 0 \end{pmatrix} \right) ds \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \frac{5}{2}s^2 + \frac{7}{6}s^3 + \frac{1}{6}s^4 + 5s + \frac{1}{9}s^6 + 2 \\ \frac{1}{18}s^8 + \frac{1}{3}s^5 + s^2 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{63}x^7 + 2x \\ \frac{1}{162}x^9 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{3}x^3 + 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

b) Wir berechnen einige diskreten Stellen der Approximation. Wir finden

$$
\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{x}_n^2 \end{pmatrix} \mathbf{y}_n + h \begin{pmatrix} 3\mathbf{x}_n \\ 0 \end{pmatrix}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_0 &= 0 \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}_1 &= \tfrac{1}{2} \quad \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}_2 &= 1 \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}_3 &= \tfrac{3}{2} \quad \mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{27}{16} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)**:** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} (\frac{1}{3}+x^2)y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$$

a) Nehmen Sie an, dass sich die Lösung als Potenzreihe schreiben lässt und finden Sie so eine Lösung des Anfangswertproblems.

b) Zeigen Sie, dass das Problem keine andere Lösung haben kann.
Hinweis: Schreiben Sie das Problem in ein System erster Ordnung um und verwenden Sie ein Ergebnis zur Eindeutigkeit von Lösungen.

Lösung 2: a) Wir nehmen an, dass man die Lösung als Potenzreihe schreiben kann. Es gilt also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Wegen der Anfangsbedingungen muss $b_0 = 1$ und $b_1 = 2$ gelten. Außerdem finden wir

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(k+1)x^k,$$
$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2}(k+2)(k+1)x^k.$$

Mit der Differentialgleichung folgt

$$(\tfrac{1}{3}+x^2)\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - 4x\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(k+1)x^k + 6\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^k\left(\tfrac{1}{3}(k+2)(k+1)b_{k+2} + 6b_k\right) + x^{k+1}(-4(k+1)b_{k+1}) + x^{k+2}\left((k+2)(k+1)b_{k+2}\right)\right) = 0.$$

Dies können wir umschreiben und finden

$$0 = (\tfrac{2}{3}b_2 + 6b_0) + x(2b_1 + 2b_3) + \sum_{k=2}^{\infty} x^k\left(\tfrac{1}{3}(k+2)(k+1)b_{k+2} + b_k(k^2-5k+6)\right)$$

Wir können $b_0 = 1$ und $b_1 = 2$ einsetzen und erhalten

$$0 = (\tfrac{2}{3}b_2 + 6) + x(4 + 2b_3) + \sum_{k=2}^{\infty} x^k\left(\tfrac{1}{3}(k+2)(k+1)b_{k+2} + b_k(k^2-5k+6)\right)$$

Nun können wir die Koeffizienten berechnen. Wir finden

$$b_2 = -9,$$
$$b_3 = -2,$$
$$b_4 = 0,$$
$$b_5 = 0,$$

und damit folgt auch $b_k = 0$ für alle $k \geq 6$. Wir erhalten also

$$y(x) = 1 + 2x - 9x^2 - 2x^3.$$

b) Wir können das Problem in ein System erster Ordnung umschreiben. Mit $z_1(x) = y(x)$ und $z_2(x) = y'(x)$ finden wir

$$\begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ \frac{4x}{\frac{1}{3}+x^2} z_2(x) - \frac{6}{\frac{1}{3}+x^2} z_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6}{\frac{1}{3}+x^2} & \frac{4x}{\frac{1}{3}+x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, dass wir das folgende Anfangswertproblem betrachten:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6}{\frac{1}{3}+x^2} & \frac{4x}{\frac{1}{3}+x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Nach Lemma 3.5 hat das Problem höchstens eine Lösung, da die Matrix beschränkt ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**:** Sei $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Picard-Iteration zu dem folgenden Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie genügend viele Iterationsschritte, um eine Formel für y_n zu erkennen. Beweisen Sie diese dann durch vollständige Induktion.

Lösung 3: Wir setzen

$$y_0(x) = 0.$$

Dann finden wir im ersten Iterationsschritt

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x s0 + 1ds = \int_0^x 1ds = x.$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \int_0^x (sy_1(s) + 1)ds = \int_0^x (s^2 + 1)ds = \tfrac{1}{3}x^3 + x, \\ y_3(x) &= \int_0^x (sy_2(s) + 1)ds = \int_0^x (\tfrac{1}{3}s^4 + s^2 + 1)ds = \tfrac{1}{5\cdot 3}x^5 + \tfrac{1}{3}x^3 + x, \\ y_4(x) &= \int_0^x (sy_3(s) + 1)ds = \int_0^x (\tfrac{1}{15}s^6 + \tfrac{1}{3}s^4 + s^2 + 1)ds = \tfrac{1}{7\cdot 5\cdot 3}x^7 + \tfrac{1}{5\cdot 3}x^5 + \tfrac{1}{3}x^3 + x. \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k+1} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k}(2j+1)} \text{ für } n \in \mathbb{N}^+.$$

Für $n = 1$ stimmt die Gleichung. Wir nehmen also an, dass die Formel für ein $n \in \mathbb{N}^+$ stimmt. Wir zeigen, dass sie dann auch für $n + 1$ korrekt ist. Es gilt

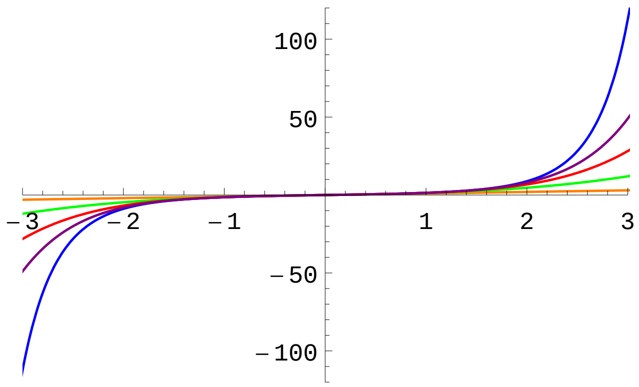
$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) = \int_0^x (sy_n(s) + 1)ds &= \int_0^x \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} s^{2(k+1)} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k}(2j+1)}\right) ds \\ &= x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)+1} x^{2(k+1)+1} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k}(2j+1)} \\ &= x + \sum_{k=0}^{n-1} x^{2(k+1)+1} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k+1}(2j+1)} \\ &= x + \sum_{k=1}^{n} x^{2k+1} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k}(2j+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k}(2j+1)}. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gültig ist.

Bemerkung: Mathematica bekommt als Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{x^2/2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

heraus.



In der Abbildung ist die Lösung in blau und die Approximationen y_1 (orange), y_2 (grün), y_3 (rot) und y_4 (lila) dargestellt.

Aufgabe 4: Wir betrachten die folgenden Funktionen f_i mit $i \in \{1,2\}$:

$$f_1 : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \qquad f_1(x) = x + e^{x^2},$$
$$f_2 : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty), \qquad (f_2(x))(t) = \tfrac{1}{3}x(t^2) - 1.$$

Beantworten Sie mit Begründung die folgenden Fragen:

a) Gilt $\|f_i(x) - f_i(y)\| < \|x - y\|$ für alle x, y aus den angegebenen Definitionsgebieten mit $x \neq y$?

b) Gibt es eine Konstante $L > 0$, sodass $\|f_i(x) - f_i(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle x, y aus den angegebenen Definitionsgebieten?

c) Wie viele Fixpunkte hat f_i?

Lösung 4: a) 1. Für f_1 ist die Ungleichung nicht erfüllt. Beispielsweise kann $x = 0$ und $y = 1$ betrachtet werden. Es gilt

$$|f_1(0) - f_1(1)| = |1 - 1 - e^1| = e^1 > 1 = |x - y|.$$

2. Da $t \mapsto t^2$ auf $[0,1]$ bijektiv ist, finden wir für beliebige $x, y \in C([0,1])$

$$\|f_2(x) - f_2(y)\|_\infty = \tfrac{1}{3} \sup_{t\in[0,1]} |x(t^2) - y(t^2)| = \tfrac{1}{3} \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| = \tfrac{1}{3}\|x - y\|_\infty.$$

Die Bedingung ist also erfüllt.

b) 1. Mit dem Mittelwertsatz finden wir für jedes Paar $x < y$ ein $\xi_{x,y} \in (x, y)$, sodass

$$|f_1(x) - f_1(y)| = |f_1'(\xi_{x,y})||x - y| = |1 + 2\xi_{x,y}e^{\xi_{x,y}^2}||x - y|.$$

Wählt man jedoch $x_n = n$ und $y_n = n + 1$, finden wir, dass $|f_1'(\xi_{x_n,y_n})| \to \infty$ für $n \to \infty$. Also gilt die Bedingung nicht.

2. Ja, mit $L = \frac{1}{3}$ folgt die Aussage wie in Aufgabenteil a).

c) 1. Für einen Fixpunkt $x \in \mathbb{R}$ muss gelten $f_1(x) = x$, also

$$x = f_1(x) = x + e^{x^2} \Leftrightarrow 0 = e^{x^2}.$$

Da jedoch $e^{x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, hat f_1 keinen Fixpunkt.

2. Für einen Fixpunkt $x \in C([0,1])$ muss iterativ für $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{3}x(t^2) - 1 = \tfrac{1}{3^2}x(t^4) - \tfrac{1}{3} - 1 \\ &= \tfrac{1}{3^3}x(t^8) - \tfrac{1}{3^2} - \tfrac{1}{3} - 1 \\ &= \tfrac{1}{3^{n+1}}x(t^{2^{n+1}}) - \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{3^k}. \end{aligned}$$

Da x beschränkt ist, folgt für $n \to \infty$, dass

$$x(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{3^k} = -\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = -\tfrac{3}{2}$$

Also haben wir mit $x(t) = -\frac{3}{2}$ einen Fixpunkt gefunden und es kann keinen weiteren Fixpunkt geben.