Prof. Dr. Guido Sweers **WS 20/21**
Inka Schnieders, M.Sc.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 15.12.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (4+4+4 Punkte)**:** Wir betrachten die Abbildung gegeben durch

$$T : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty), \quad (Tf)(x) = x^3 + \tfrac{1}{3} f(\sqrt[3]{x}).$$

a) Zeigen Sie, dass T eine Kontraktion ist und dass es genau einen Fixpunkt $\tilde{f} \in C([0,1])$ gibt.

b) Berechnen Sie $\tilde{f}(0)$ und $\tilde{f}(1)$.

c) Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ eine monoton wachsende Funktion ist.

Hinweis: Fangen Sie mit einer monoton steigenden Funktion an.

Lösung 1: a) Wir zeigen zunächst, dass T eine Kontraktion ist. Dafür zeigen wir die Lipschitzstetigkeit mit Lipschitz-Konstante $L < 1$. Seien $f, g \in C([0,1])$ beliebig. Dann gilt mit der Bijektivität von $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ auf $[0,1]$:

$$\begin{aligned}\|Tf - Tg\|_\infty &= \tfrac{1}{3}\|f(\sqrt[3]{\cdot}) - g(\sqrt[3]{\cdot})\|_\infty = \tfrac{1}{3} \sup_{x\in[0,1]} |f(\sqrt[3]{x}) - g(\sqrt[3]{x})| \\ &= \tfrac{1}{3} \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = \tfrac{1}{3}\|f-g\|_\infty.\end{aligned}$$

Also ist T Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = \frac{1}{3} < 1$. Nach dem Fixpunktsatz von Banach gibt es genau einen Fixpunkt $\tilde{f} \in C([0,1])$.

b) Für den Fixpunkt $\tilde{f}$ gilt

$$\tilde{f}(x) = x^3 + \tfrac{1}{3}\tilde{f}(\sqrt[3]{x}).$$

Daraus folgt

$$\tilde{f}(0) = \tfrac{1}{3}\tilde{f}(0) \Leftrightarrow \tilde{f}(0) = 0,$$

und

$$\tilde{f}(1) = 1 + \tfrac{1}{3}\tilde{f}(1) \Leftrightarrow \tilde{f}(1) = \tfrac{3}{2}.$$

c) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz konvergiert die Folge definiert durch $f_0 \in C([0,1])$ und $f_{n+1} = T(f_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ gegen $\tilde{f}$ (egal mit welcher Funktion f_0 wir starten). Sei nun f_0 eine stetige monoton steigende Funktion, z.B. $f_0(x) = x$. Dann ist auch f_n eine monoton steigende Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies folgt daraus, dass für eine monoton steigende Funktion f auch die Funktion $(Tf)(x) = x^3 + \frac{1}{3}f(\sqrt[3]{x})$ als Komposition monoton steigender Funktionen wieder monoton steigend ist.

Angenommen $\tilde{f}$ ist nicht monoton steigend. Dann gibt es $x_1, x_2 \in [0,1]$ mit $x_1 < x_2$, sodass $\tilde{f}(x_1) > \tilde{f}(x_2)$ bzw. $\tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_2) =: \delta > 0$. Dies führt jedoch zu einem Widerspruch, denn für $n \in \mathbb{N}$ mit $\|\tilde{f} - f_n\|_\infty < \frac{\delta}{4}$ gilt

$$\begin{aligned}
\delta = \tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_2) &= \tilde{f}(x_1) - f_n(x_1) + f_n(x_1) - f_n(x_2) + f_n(x_2) - \tilde{f}(x_2) \\
&\leq 2\|\tilde{f} - f_n\|_\infty + f_n(x_1) - f_n(x_2) \\
&< \tfrac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Demnach ist der Fixpunkt $\tilde{f}$ monoton steigend.

Alternativer Beweis: Da $\tilde{f}$ stetig ist, gibt es ein $M > 0$, sodass $\|\tilde{f}\|_\infty \leq M$. Wir nehmen an, dass $\tilde{f}$ nicht monoton steigend ist. Dann gibt es $x_1, x_2 \in [0,1]$, sodass $x_1 < x_2$ und $\tilde{f}(x_1) > \tilde{f}(x_2)$. Sei $\varepsilon = \tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_2)$ und $N \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{2M}{3^{N+1}} < \varepsilon$. Außerdem finden wir nach $N \in \mathbb{N}$ Schritten

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= x^3 + \tfrac{1}{3}\tilde{f}(\sqrt[3]{x}) \\
&= x^3 + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3^2}\tilde{f}(x^{3^{-2}}) \\
&= x^3 + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3^2}x^{3^{-1}} + \tfrac{1}{3^3}\tilde{f}(x^{3^{-3}}) \\
&= \dots = \sum_{k=0}^{N} \tfrac{1}{3^k}x^{3^{-(k-1)}} + \tfrac{1}{3^{N+1}}\tilde{f}(x^{3^{-N-1}}).
\end{aligned}$$

Die Funktion $x \mapsto \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{3^k}x^{3^{-(k-1)}}$ ist als Summe streng monoton steigender Funktionen streng monoton steigend. Es gilt

$$\begin{aligned}
\varepsilon = \tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_2) &= \left(\sum_{k=0}^{N} \tfrac{1}{3^k}x_1^{3^{-(k-1)}} - \sum_{k=0}^{N} \tfrac{1}{3^k}x_2^{3^{-(k-1)}}\right) + \tfrac{1}{3^{N+1}}\tilde{f}(x_1^{3^{-N-1}}) - \tfrac{1}{3^{N+1}}\tilde{f}(x_2^{3^{-N-1}}) \\
&< \tfrac{1}{3^{N+1}}\tilde{f}(x_1^{3^{-N-1}}) - \tfrac{1}{3^{N+1}}\tilde{f}(x_2^{3^{-N-1}}) < \tfrac{2M}{3^{N+1}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, also ist $\tilde{f}$ monoton steigend.

Aufgabe 2:[*] Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(y(x)), \\ y(0) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a) Geben Sie eine Lipschitz-Konstante an, sodass die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist.

b) Zeigen Sie, dass es genau eine Lösung gibt und diese Existenzintervall $\mathbb{R}$ besitzt. Begründen Sie außerdem, dass $\lim_{x\to\infty} y(x) = \pi$ und $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

Lösung 2: a) Sei $f(x, y) = \sin(y)$. Eine geeignete Lipshitz-Konstante ist $L = 1$, denn die Ableitung von $y \mapsto \sin(y)$ ist durch 1 beschränkt. Damit folgt

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |\sin(y) - \sin(z)| \leq |y - z|.$$

b) Die Funktion f ist stetig und erfüllt nach Aufgabenteil a) die Lipschitzbedingung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann folgt nach dem Theorem über globale Existenz, dass es genau eine Lösung zu dem Problem gibt und mit Korollar 6.14 folgt, dass das Existenzintervall ganz $\mathbb{R}$ ist.

Außerdem ist die Lösung monoton steigend für $x \geq 0$ und durch π beschränkt. Denn für $x = 0$ gilt $y(0) = \frac{\pi}{2}$ und $y'(0) = 1 > 0$. Das bedeutet y steigt immer weiter. Erst wenn der Wert π erreicht wird, ist y nicht mehr strikt monoton steigend. Wenn es jedoch einen Punkt $x_1 > 0$ gibt mit $y(x_1) = \pi$, dann würde y auch das folgende Anfangswertproblem lösen:

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(y(x)), \\ y(x_1) = \pi. \end{cases}$$

Dies ist ein Widerspruch, denn dieses Problem hat auch eine eindeutige Lösung und $y \equiv \pi$ ist bereits eine Lösung. Das bedeutet y nimmt nur Werte kleiner als π an. Analog kann begründet werden, dass die Lösung auch für $x < 0$ strikt monoton steigend ist und immer nur Werte größer als 0 annehmen kann.

Damit das Existenzintervall ganz $\mathbb{R}$ sein kann und y strikt monoton steigend und kleiner als π sowie größer als 0 sein kann, muss $\lim_{x\to\pm\infty} y'(x) = 0$ gelten. Das bedeutet

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \pi,$$
$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0.$$

[*] Unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 3 (8 Punkte)**:** Wir betrachten das folgende System von Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$\begin{cases} y'''(x) = z''(x) + y'(x)^2 - 5y(x) + z(x)^3, \\ z'''(x) = 2y''(x) + y'(x) - 3z'(x)^2 - 2z(x)^2. \end{cases} \tag{1}$$

Geben Sie Bedingungen in $x = 0$ derart an, dass ein Intervall $[\underline{x}, \overline{x}] \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in (\underline{x}, \overline{x})$ und genau ein nicht-triviales Lösungspaar $y, z \in C^3([\underline{x}, \overline{x}])$ von (1) mit den gewählten Anfangswerten existiert. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 3: Wir schreiben das System in ein System erster Ordnung um. Dafür sei $y = w_1, y' = w_2, y'' = w_3, z = w_4, z' = w_5, z'' = w_6$. Damit folgt

$$\begin{pmatrix} w_1'(x) \\ w_2'(x) \\ w_3'(x) \\ w_4'(x) \\ w_5'(x) \\ w_6'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2(x) \\ w_3(x) \\ w_6(x) + w_2(x)^2 - 5w_1(x) + w_4(x)^3 \\ w_5(x) \\ w_6(x) \\ 2w_3(x) + w_2(x) - 3w_5(x)^2 - 2w_4(x)^2 \end{pmatrix} =: \vec{f}(x, \vec{w}(x))$$

Sei $B = B_2(0) \subset \mathbb{R}^6$. Dann ist $\vec{f} : [-1, 1] \times \overline{B} \to \mathbb{R}^6$ stetig und erfüllt die Lipschitzbedingung:

$$\begin{aligned} \|\vec{f}(x, \vec{u}) - \vec{f}(x, \vec{w})\| &= \left\| \begin{pmatrix} u_2 - w_2 \\ u_3 - w_3 \\ (u_6 - w_6) + u_2^2 - w_2^2 - 5(u_1 - w_1) + u_4^3 - w_4^3 \\ u_5 - w_5 \\ u_6 - w_6 \\ 2(u_3 - w_3) + (u_2 - w_2) - 3u_5^2 + 3w_5^2 - 2u_4^2 + 2w_4^2 \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} |u_2 - w_2| \\ |u_3 - w_3| \\ |u_6 - w_6| + 4|u_2 - w_2| + 5|u_1 - w_1| + 12|u_4 - w_4| \\ |u_5 - w_5| \\ |u_6 - w_6| \\ 2|u_3 - w_3| + |u_2 - w_2| + 12|u_5 - w_5| + 8|u_4 - w_4| \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} \|\vec{u} - \vec{w}\| \\ \|\vec{u} - \vec{w}\| \\ 22\|\vec{u} - \vec{w}\| \\ \|\vec{u} - \vec{w}\| \\ \|\vec{u} - \vec{w}\| \\ 23\|\vec{u} - \vec{w}\| \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(4 + 22^2 + 23^2)}\|\vec{u} - \vec{w}\| = 3\sqrt{113}\|\vec{u} - \vec{w}\| \end{aligned}$$

für alle $(x, \vec{u}), (x, \vec{w}) \in [-1, 1] \times \overline{B}$. Alternativ kann man auch mit der stetigen Differenzierbarkeit von $\vec{f}$ analog zu Bemerkung 6.4.4 begründen, dass die Lipschitz-Bedingung erfüllt sein muss. Wir wählen zum Beispiel die Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = 0, \\ z(0) = 0, \quad z'(0) = 0, \quad z''(0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

(oder beliebig andere Werte mit $(y(0), y'(0), y''(0), z(0), z'(0), z''(0)) \in B_2(0)$). Dann folgt mit dem Satz von Picard-Lindelöf, dass es $\underline{x} < 0 < \overline{x}$ gibt, sodass das System erster Ordnung lokal genau eine Lösung $\vec{w} \in C^1([\underline{x}, \overline{x}]; \mathbb{R}^6)$ besitzt. D.h. es gibt lokal nur ein Lösungspaar $y, z \in C^3([\underline{x}, \overline{x}])$.

Aufgabe 4: * Seien $y, \alpha, \beta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\beta \geq 0$ und α monoton steigend. Zeigen Sie, dass wenn

$$y(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s) y(s) ds \text{ für alle } x \in [x_0, x_1],$$

dann gilt

$$y(x) \leq \alpha(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \beta(s) ds\right) \text{ für alle } x \in [x_0, x_1].$$

Hinweis: Für eine monoton steigende Funktion $\alpha : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *gilt* $\alpha(s) \leq \alpha(x)$ *für alle* $s \in [x_0, x]$. *Dann suche man eine Stammfunktion.*

Lösung 4: Mit dem Lemma von Grönwall finden wir, dass

$$y(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\alpha(s) \exp\left(\int_{s}^{x} \beta(t) dt\right) ds \text{ für alle } x \in [x_0, x_1].$$

Da $\alpha(s) \leq \alpha(x)$ für alle $s \in [x_0, x]$ und $\beta \geq 0$ sowie $\exp\left(\int_s^x \beta(t)dt\right) \geq 0$ für alle $x_0 \leq s \leq x \leq x_1$ finden wir

$$\begin{aligned}
y(x) &\leq \alpha(x) + \alpha(x) \int_{x_0}^{x} \beta(s) \exp\left(\int_{s}^{x} \beta(t) dt\right) ds \\
&= \alpha(x) + \alpha(x) \left[- \exp\left(\int_{s}^{x} \beta(t) dt\right)\right]_{x_0}^{x} \\
&= \alpha(x) + \alpha(x) \left(-1 + \exp\left(\int_{x_0}^{x} \beta(t) dt\right)\right) \\
&= \alpha(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \beta(t) dt\right)
\end{aligned}$$

für alle $x \in [x_0, x_1]$.