Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 20/21**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 22.12.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1:* Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte des folgenden Systems und skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y(t) - x(t)^2 + 1 \\ y(t)^2 - y(t)x(t) \end{pmatrix}.$$

Lösung 1: Sei

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y - x^2 + 1 \\ y^2 - xy \end{pmatrix}.$$

Für Gleichgewichtspunkte (x, y) gilt $f(x, y) = 0$. Es gilt $f_2(x, y) = 0$ wenn

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad y = x.$$

Außerdem finden wir $f_1(x, 0) = 0$ genau dann wenn $x = \pm 1$ und $f_1(x, x) = 0$ genau dann wenn $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Die Gleichgewichtspunkte sind damit

$$(-1, 0), (1, 0), (1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}), (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).$$

Die Ableitung von x ist Null genau auf der Kurve $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ und die Ableitung von y ist Null genau auf den Kurven $y = 0$ und $y = x$. Wir finden

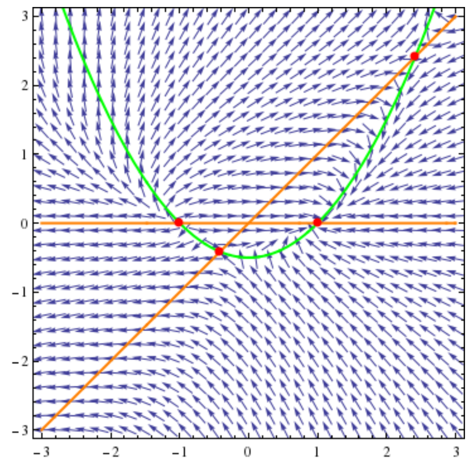
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x & 2 \\ -y & 2y - x \end{pmatrix}.$$

Die linearisierten Systeme sind also $\vec{z}'(t) = A_i \vec{z}(t)$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 + 2\sqrt{2} & 2 \\ -1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -2 - 2\sqrt{2} & 2 \\ -1 - \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A_1 sind 2 und 1 (linearisierte System: instabiler Knoten), von A_2 sind sie -2 und -1 (linearisierte System: stabiler Knoten), von A_3 sind sie $1,309...$ und $-0,8949...$ (linearisierte System: Sattelpunkt), von A_4 sind sie $-4,0855...$ und $1,6713...$ (linearisierte System: Sattelpunkt) Das Vektorfeld wird also

*Unbewertete Zusatzaufgabe



3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3

Aufgabe 2:* Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y(t)-x(t)^2+1)(2+x(t))^2 \\ (1+x(t))(y(t)+x(t)^2-x(t)+1) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

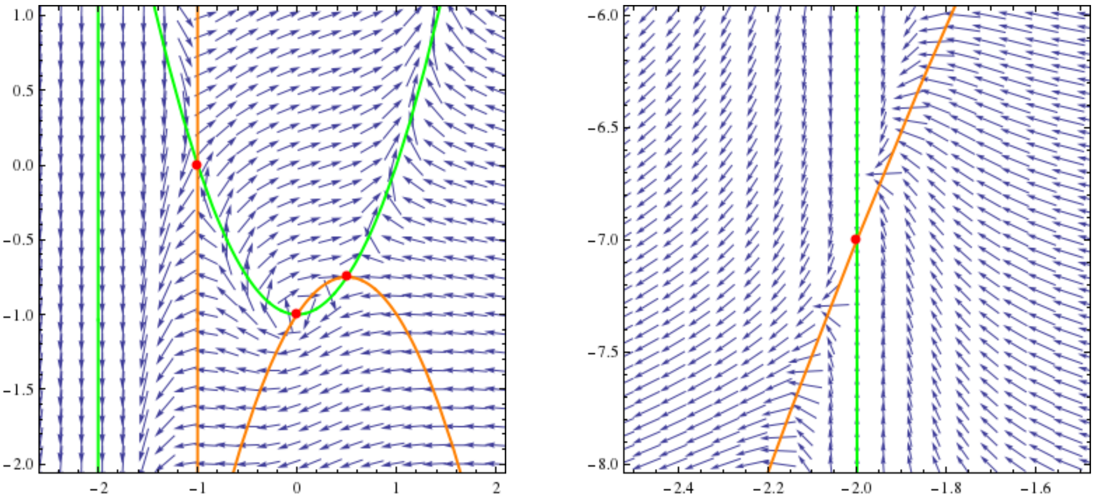
a) Zeigen Sie, dass $p_1 = (-1,0)$, $p_2 = (-2,-7)$, $p_3 = (0,-1)$ und $p_4 = (1/2,-3/4)$ die einzigen Gleichgewichtspunkte sind.

b) Geben Sie die um p_1, p_2, p_3 und p_4 linearisierten Gleichungssysteme an.

c) Von welchen Typen sind diese Systeme? Sind sie stabil oder instabil?

d) Welche Aussagen kann man daraus für das System in (1) ableiten?

e) Ist der Punkt p_2 stabil oder instabil? Sie dürfen diese Frage mit dem Vektorfeld unten begründen.



Das Vektorfeld mit vier Nullklinen zu (1).

Lösung 2: a) Sei

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} (y-x^2+1)(2+x)^2 \\ (1+x)(y+x^2-x+1) \end{pmatrix}.$$

Es gilt $f_1(x,y) = 0$ genau dann wenn $x = -2$ oder $y = x^2 - 1$ und $f_2(x,y) = 0$ genau dann wenn $x = -1$ oder $y = -x^2 + x - 1$. Wir finden $x^2 - 1 = -x^2 + x - 1$ für $x = 0$ und $x = 1/2$. Daraus folgt, dass die einzigen Gleichgewichtspunkte

$$(-1,0), (-2,-7), (0,-1), (1/2,-3/4)$$

sind.

b) Wir finden

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2(x+2)(2x^2+2x-y-1) & (x+2)^2 \\ 3x^2+y & x+1 \end{pmatrix}.$$

Die linearisierten Gleichungssysteme sind $\vec{z}\,'(t) = \nabla f(p_i)\vec{z}(t)$ mit

$$\nabla f(p_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \nabla f(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \nabla f(p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \nabla f(p_4) = \begin{pmatrix} -\frac{25}{4} & \frac{25}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Wir berechnen die Eigenwerte der Matrizen und finden

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3; \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0; \quad \lambda_1 = 1/2(1 + i\sqrt{15}), \lambda_2 = 1/2(1 - i\sqrt{15});$$
$$\lambda_1 = 3/2, \lambda_2 = -25/4.$$

Damit erhalten wir für die linearisierten Systeme einen Sattelpunkt (für p_1), einen neutral stabilen Knoten (für p_2), einen instabilen Strudel (für p_3) und einen Sattelpunkt (für p_4). Damit sind die linearisierten Systeme um p_1, p_3 und p_4 instabil und um p_2 stabil.

d) Aus einem Theorem aus der Vorlesung folgt mit c), dass p_1, p_3 und p_4 instabil sind. Außerdem können wir für den Punkt p_2 keine Aussage treffen.

e) Sei $\varepsilon = 1$. Wir sehen im Vektorfeld, dass wenn wir einen Startpunkt wie $(a, -7)$ wählen, wobei $a < -2$, dann bewegt sich die Lösung für $t \to \infty$ aus $B_\varepsilon((-2, -7))$ heraus. Wir können dabei a beliebig nahe an -2 wählen. Also kann nach der Definition von Stabilität der Punkt p_2 nicht stabil sein.

Aufgabe 3 (4+4+4+4+4 Punkte)**:** Es wird das folgende Gleichungssystem betrachtet:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t)^2 + 2x(t) - x(t)(x(t)^2 + y(t)^2) \\ x(t)y(t) + 2y(t) - y(t)(x(t)^2 + y(t)^2) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtspunkte des Systems $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (-\sqrt{2}, 0)$ und $p_3 = (\sqrt{2}, 0)$ sind.

b) Bestimmen Sie die Linearisierungen um p_1, p_2 und p_3. Welche Aussagen kann man über die Stabilität der linearisierten Systeme treffen? Ist das System (2) stabil oder instabil in den drei Punkten?

c) Angenommen $(x,y) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist eine Lösung von (2). Zeigen Sie, dass dann $w(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ eine Lösung der Differentialgleichung $w'(t) = -2w(t)(w(t) - 2)$ ist.

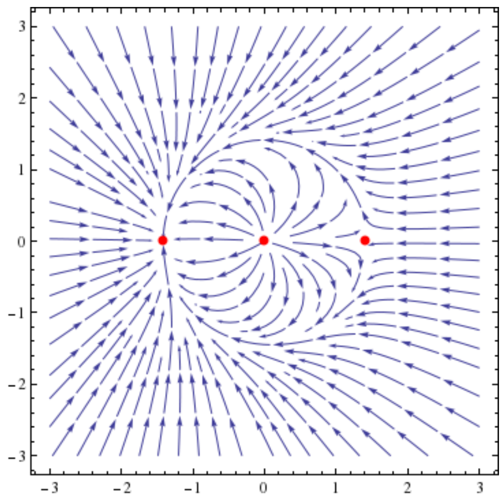
d) Sei $(x(0), y(0)) \neq (0,0)$ und $(x,y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (2). Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{t \to \infty} \|(x(t), y(t))\| = \sqrt{2}.$$

e) Geben Sie Anfangspunkte $(x_1(0), y_1(0))$ und $(x_2(0), y_2(0))$ sowie dazugehörige nicht-konstante Lösungen von (2) an, sodass

$$\lim_{t \to \infty} (x_1(t), y_1(t)) = p_2, \quad \lim_{t \to \infty} (x_2(t), y_2(t)) = p_3.$$

Hinweis: "Nicht-konstant"bedeutet hier, dass $(x_1(t), y_1(t)) = p_2$ *bzw.* $(x_2(t), y_2(t)) = p_3$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *nicht als Lösung genommen werden darf. Lösungen bei denen* x_1 *nicht-konstant ist und* y_1 *konstant (oder andersherum) bzw.* x_2 *nicht-konstant ist und* y_2 *konstant (oder andersherum) sind erlaubt.*



Lösung 3: a) Sei f gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2 + 2x - x(x^2 + y^2) \\ xy + 2y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Falls $x = 0$, dann ist $f_1(0,y) = 0$ nur wenn $y = 0$ und außerdem finden wir $f_2(0,0) = 0$, also ist $(0,0)$ ein Gleichgewichtspunkt.

Falls $y = 0$, dann ist $f_2(x,0)$ immer gleich Null und $f_1(x,0) = 0$ nur wenn $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{2}$, also sind auch $(\pm\sqrt{2}, 0)$ zwei weitere Gleichgewichtspunkte.

Seien nun $x, y \neq 0$, dann müsste für die Gleichgewichtspunkte gelten

$$0 = y f_1(x,y) - x f_2(x,y) = -y(y^2 + x^2) \neq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch, also kommen keine weiteren Gleichgewichtspunkte hinzu.

b) Wir finden die drei linearisierten Systeme

$$\begin{aligned}
\vec{z}'(t) &= \nabla f(p_1)\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{z}(t) \\
\vec{z}'(t) &= \nabla f(p_2)\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \vec{z}(t) \\
\vec{z}'(t) &= \nabla f(p_3)\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \vec{z}(t).
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte können wir direkt ablesen und finden, dass das erste System ein instabiler Knoten, das zweite System ein stabiler Knoten und das dritte System ein Sattelpunkt (instabil) ist. Aus einem Theorem aus der Vorlesung folgt, dass das ursprüngliche System in p_1 und p_3 instabil ist und in p_2 stabil.

c) Wir leiten w ab und finden direkt mit (2)

$$\begin{aligned}
w'(t) &= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \\
&= -2x(t)y(t)^2 + 4x(t)^2 - 2x(t)^2(x(t)^2 + y(t)^2) + 2x(t)y(t)^2 + 4y(t)^2 - 2y(t)^2(x(t)^2 + y(t)^2) \\
&= 4x(t)^2 + 4y(t)^2 - 2(x(t)^2 + y(t)^2)^2 \\
&= 4w(t) - 2w(t)^2 = -2w(t)(w(t) - 2).
\end{aligned}$$

d) Wir müssen zeigen, dass für alle Lösungen $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ von $w'(t) = -2w(t)(w(t) - 2)$ mit $w(0) \neq 0$ das folgende erfüllt:

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{w(t)} = \sqrt{2}.$$

Die Differentialgleichung ist trennbar. Konstante Lösungen sind $w(t) = 0$ und $w(t) = 2$. Für die erste gilt $w(0) = 0$, sie ist also irrelevant für unsere Betrachtung. und für die zweite konstante Lösung gilt die Behauptung. Außerdem können wir

$$\frac{w'(t)}{-2w(t)(w(t) - 2)} = 1$$

mithilfe von Partialbruchzerlegung lösen und finden

$$w_c(t) = \frac{2e^{4t}}{c + e^{4t}} \text{ für } c \in \mathbb{R}.$$

Wir finden $\lim_{t\to\infty} w_c(t) = 2$ und damit die Behauptung.

e) Am einfachsten ist es, wenn wir Lösungen der Form $(x(t), 0)$ suchen. Wir wählen (Idee durch Vektorfeld) $(x_1(0), y_1(0)) = (-2, 0)$ und $(x_2(0), y_2(0)) = (2, 0)$. Mit (2) folgt, dass wir das folgenden Anfangswertprobleme lösen müssen:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - x(t)^3, \\ x(0) = \pm 2. \end{cases}$$

Das ist auch eine trennbare Differentialgleichung und wir finden mit Trennung der Variablen die nicht-konstanten Lösungen

$$x(t) = \pm\sqrt{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{c + e^{4t}}} \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Für den Anfangswert $x_1(0) = -2$ finden wir

$$x_1(t) = -2\frac{e^{2t}}{\sqrt{2e^{4t} - 1}}$$

und für $x_2(0) = 2$ finden wir

$$x_2(t) = 2\frac{e^{2t}}{\sqrt{2e^{4t} - 1}}.$$

und es folgt direkt

$$\lim_{t\to\infty}(x_1(t), y_1(t)) = p_2, \lim_{t\to\infty}(x_2(t), y_2(t)) = p_3.$$