Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 20/21**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 12.01.2021, um 12 Uhr.

Aufgabe 1:*

a) Wir nehmen an, dass

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'(t) = TMT^{-1}y(t).$$

b) Die Funktionen

$$y(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1+t \\ 1-t \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind für $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ Lösungen von $y'(t) = Ay(t)$. Berechnen Sie $A \in M^{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Lösung 1: a) Es gilt

$$\exp(tTMT^{-1}) = T\exp(tM)T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t}\cos(4t) & e^{5t}\sin(4t) \\ 0 & 0 & -e^{5t}\sin(4t) & e^{5t}\cos(4t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$y(t) = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t}\cos(4t) & e^{5t}\sin(4t) \\ 0 & 0 & -e^{5t}\sin(4t) & e^{5t}\cos(4t) \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

*Unbewertete Zusatzaufgabe

mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Wir definieren $T^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_4 \end{pmatrix}$. Dann folgt

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{3t} & -e^{5t}\cos(4t) - e^{5t}\sin(4t) & -e^{5t}\sin(4t) + e^{5t}\cos(4t) \\ 2e^t & -e^{3t} & e^{5t}\cos(4t) - e^{5t}\sin(4t) & e^{5t}\sin(4t) + e^{5t}\cos(4t) \\ -e^t & -e^{3t} & e^{5t}\cos(4t) - 2e^{5t}\sin(4t) & e^{5t}\sin(4t) + 2e^{5t}\cos(4t) \\ e^t & e^{3t} & 2e^{5t}\cos(4t) + e^{5t}\sin(4t) & 2e^{5t}\sin(4t) - e^{5t}\cos(4t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_4 \end{pmatrix}.$$

b) Wir können mit der Darstellung der Lösung direkt die Eigenvektoren und generalisierten Eigenvektoren ablesen. Die Eigenvektoren sind:

$$\varphi_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und den generalisierten Eigenvektor

$$\psi_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen also

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und finden die inverse Matrix

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$A = T \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)**:** Betrachten Sie das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x(t)^2 + z(t)y(t) - y(t)x(t) - y(t) - x(t) \\ 1 + x(t)^2 + y(t)z(t) - x(t)y(t) - y(t) - z(t) \\ 1 + y(t)z(t) - y(t) - z(t) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(1, 1, 1)$ ein Gleichgewichtspunkt ist und untersuchen Sie, ob das linearisierte System stabil oder instabil ist.

b) Ist der Punkt $(1, 1, 1)$ im ursprünglichen System stabil oder instabil?
Hinwies: Berechnen Sie Lösungen der Form $x(t) = y(t) = z(t)$.

Lösung 2: a) Sei

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 + x^2 + zy - yx - y - x \\ 1 + x^2 + yz - xy - y - z \\ 1 + yz - y - z \end{pmatrix}.$$

Wenn wir $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ in f einsetzen, finden wir $f(x, y, z) = 0$, also handelt es sich um einen Gleichgewichtspunkt. Außerdem gilt

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y - 1 & z - x - 1 & y \\ 2x - y & z - x - 1 & y - 1 \\ 0 & z - 1 & y - 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\nabla f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen nun die Eigenwerte dieser Matrix. Es gilt

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(-1 - \lambda) - \lambda = \lambda(-\lambda^2 - \lambda - 1)$$

und wir finden

$$\lambda_1 = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Daraus folgt, dass das linearisierte Problem stabil ist.

b) Wir berechnen eine Lösung der Form $x(t) = y(t) = z(t)$ und müssen demnach die folgende Differentialgleichung lösen:

$$x'(t) = 1 + x(t)^2 - 2x(t) = (x(t) - 1)^2.$$

Diese Differentialgleichung ist trennbar. Wir finden

$$-\frac{1}{x(t) - 1} = t + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt

$$x(t) = \frac{-1+t+c}{t+c}.$$

Wir wählen nun für $\varepsilon > 0$ beliebig klein, den Anfangswert $x(0) = 1+\varepsilon$. Dann finden wir $c = -\frac{1}{\varepsilon}$, also

$$x(t) = \frac{-\varepsilon + t\varepsilon - 1}{\varepsilon t - 1}.$$

Wenn wir ε immer kleiner wählen, dann kommen wir mit $(1+\varepsilon, 1+\varepsilon, 1+\varepsilon)$ beliebig nahe an den Gleichgewichtspunkt $(1,1,1)$ heran. Jedoch finden wir, dass für $t \uparrow \frac{1}{\varepsilon}$ gilt, dass $x(t) \to \infty$. Wir haben also mit $(x(t), y(t), z(t)) = (x(t), x(t), x(t))$ eine Lösung gefunden, die beliebig nahe an $(1,1,1)$ startet, jedoch für $t \uparrow \frac{1}{\varepsilon}$ erfüllt, dass $\|(x(t), y(t), z(t))\| \to \infty$. Der Gleichgewichtspunkt ist also nicht stabil.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)**:** Betrachten Sie das Problem

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t)(5+x(t)y(t)) \\ y(t)(x(t)^2+y(t)-7) \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie ein $\varepsilon > 0$, sodass für $\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$ gilt

$$\frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2) \leq -2(x(t)^2 + y(t)^2).$$

b) Begründen Sie damit, dass dann folgendes gilt:

$$x(0)^2 + y(0)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0,0).$$

Was können Sie daraus für die Stabilität des Systems in $(0,0)$ folgern?

Lösung 3: a) Wir wählen $\varepsilon = 2$. Dann folgt für $\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$, dass $|x(t)|, |y(t)| < 2$ und damit $5 + x(t)y(t) \in (1,9)$ und $7 - y(t) - x(t)^2 \in (1,9)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2) &= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \\ &= -2x(t)^2(5 + x(t)y(t)) - 2y(t)^2(7 - y(t) - x(t)^2) \quad \leq -2(x(t)^2 + y(t)^2). \end{aligned}$$

Mit der Lipschitzstetigkeit der rechten Seite der Differentialgleichung auf $B_\varepsilon(0)$ folgt: Wenn wir mit $(x(t_0), y(t_0))$ in $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^2$ starten, dann existiert ein $t_+ \in (0,\infty]$, sodass die Lösung für $t \in [t_0, t_+)$ existiert und entweder $t_+ = \infty$ oder $\lim_{t\to t_+} \|(x(t), y(t))\| = 2$. Da wir $\frac{d}{dt}\|(x(t), y(t))\|^2 \leq 0$ für $t \in [t_0, t_+)$ gezeigt haben, gilt jedoch $\|(x(t), y(t))\| \leq \|(x(t_0), y(t_0))\| < \varepsilon$ für alle $t \in [t_0, t_+)$, also kommt nur $t_+ = \infty$ in Frage.

b) Aus Aufgabenteil a) folgt

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\|(x(t), y(t))\|^2) \leq -2\|(x(t), y(t))\|^2 \\ \Leftrightarrow\ & e^{2t}\frac{d}{dt}(\|(x(t), y(t))\|^2) + 2e^{2t}\|(x(t), y(t))\|^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{d}{dt}(e^{2t}\|(x(t), y(t))\|^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{d}{ds}(e^{2s}\|(x(s), y(s))\|^2)ds \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^{2t}\|(x(t), y(t))\|^2 - \|(x(0), y(0))\|^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \|(x(t), y(t))\|^2 \leq e^{-2t}\|(x(0), y(0))\|^2 \\ \Leftrightarrow\ & \|(x(t), y(t))\| \leq e^{-t}\|(x(0), y(0))\| \leq e^{-t}\varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$0 \leq \|(x(t), y(t))\| \leq \varepsilon e^{-t} \to 0$$

für $t \to \infty$ und damit die Behauptung. Wir können daraus ableiten, dass wenn wir den Anfangswert genügend nahe an $(0,0)$ wählen, dann konvergiert die Lösung des Systems gegen $(0,0)$, also ist der Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil.

Alternativ kann auch begründet werden, dass $t \mapsto \|(x(t), y(t))\|$ eine monoton fallende und nach unten durch 0 beschränkte Funktion ist. Es muss also ein Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \|(x(t), y(t))\|$ (≥ 0) existieren. Es kommt jedoch nur der Grenzwert 0 in Frage.

Aufgabe 4: * Ist die folgende Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ symmetrisch und positiv definit?

$$\langle x, y \rangle = 4x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + 4x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 + 6x_3y_3.$$

Lösung 4: Man kann die Bilinearform auch mithilfe einer Matrix schreiben:

$$\langle x, y \rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix symmetrisch ist, ist die Bilinearform symmetrisch. Aus Analysis 2 wissen wir, dass eine Matrix M positiv definit heißt, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass $\xi \cdot M\xi \geq c\|\xi\|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$. Die Matrix ist positiv definit, wenn die drei Eigenwerte positiv sind.

Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 6-\lambda \end{pmatrix} &= (4-\lambda)^2(6-\lambda) + 2 - (4-\lambda) - (4-\lambda) - (6-\lambda) \\ &= (4-\lambda)((4-\lambda)(6-\lambda) - 3) = (4-\lambda)(\lambda-7)(\lambda-3). \end{aligned}$$

Die drei Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$. Diese sind alle positiv und damit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit.