Prof. Dr. Guido Sweers **WS 20/21**
Inka Schnieders, M.Sc.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 19.01.2021, um 12 Uhr.

Aufgabe 1:* Wir betrachten das Lorenz-System

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(y-x) \\ cx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}$$

mit $c \in (0,1)$ und $a, b > 0$. Zeigen Sie mithilfe einer Lyapunov-Funktion, dass der Gleichgewichtspunkt $(0,0,0)$ global asymptotisch stabil ist.
Hinweis: Verwenden Sie eine Lyapunov-Funktion der Form $V(x,y,z) = c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2$ für geeignet gewählte $c_1, c_2, c_3 > 0$.

Lösung 1: Sei zunächst $V(x,y,z) = c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2$ mit $c_1, c_2, c_3 > 0$. Wir möchten die Konstanten so wählen, dass eine Lyapunov-Funktion entsteht. V ist eine C^1-Funktion, $V(0,0,0) = 0$ und $V(x,y,z) > 0$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$. Es muss also nur noch die Bedingung $\overset{\bullet}{V}(x,y,z) \leq 0$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sowie $\overset{\bullet}{V}(x,y,z) < 0$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ erfüllt sein. Es gilt

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{V}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 2c_1x \\ 2c_2y \\ 2c_3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(y-x) \\ cx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix} \\ &= 2ac_1xy - 2ac_1x^2 + 2cc_2xy - 2c_2y^2 - 2c_2xyz + 2c_3xyz - 2bc_3z^2 \end{aligned}$$

Wählen wir $c_1 = 1, c_2 = c_3 = a$, dann finden wir

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{V}(x,y,z) &= 2axy - 2ax^2 + 2caxy - 2ay^2 - 2baz^2 \\ &= 2a(-x^2 - y^2 + (c+1)xy - bz^2) = 2a(-\tfrac{c+1}{2}(x-y)^2 - \tfrac{1-c}{2}x^2 - \tfrac{1-c}{2}y^2 - bz^2) \\ &\leq 2a(-\tfrac{1-c}{2}x^2 - \tfrac{1-c}{2}y^2 - bz^2) < 0 \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$. Damit haben wir eine Lyapunov-Funktion und der Gleichgewichtspunkt ist global asymptotisch stabil.

*Unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 2 (4+4+4 Punkte)**:** Wir untersuchen das Problem

$$\begin{cases} x'(t) = 3y(t)(z(t)-1), \\ y'(t) = -x(t)(z(t)-1), \\ z'(t) = -z(t)^3(x(t)^2+y(t)^2+1). \end{cases}$$

a) Linearisieren Sie das System um den Gleichgewichtspunkt $(0,0,0)$. Erhalten Sie aus der Linearisierung Informationen über die Stabilität des ursprünglichen Problems?

b) Zeigen Sie mithilfe einer (quadratischen) Lyapunov-Funktion, dass $(0,0,0)$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

c) Beweisen Sie, dass es sich nicht um einen asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt handelt.
Hinweis: Setzen Sie $z \equiv 0$.

Lösung 2: a) Setze

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y(z-1) \\ -x(z-1) \\ -z^3(x^2+y^2+1) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 3(z-1) & 3y \\ -(z-1) & 0 & -x \\ -2xz^3 & -2yz^3 & -3z^2(x^2+y^2+1) \end{pmatrix}.$$

Das linearisierte Problem um $(0,0,0)$ ist

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i\sqrt{3}$, $\lambda_3 = -i\sqrt{3}$. Man erhält also keine Informationen über die Stabilität des ursprünglichen Problems.

b) Es gilt für $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$V(x,y,z) = z^2 + x^2 + 3y^2,$$

dass V eine C^1-Funktion ist, $V(0,0,0) = 0$ und $V(x,y,z) > 0$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Außerdem finden wir

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 2x \\ 6y \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3y(z-1) \\ -x(z-1) \\ -z^3(x^2+y^2+1) \end{pmatrix} = 6xy(z-1) - 6xy(z-1) - 2z^4(x^2+y^2+1) \\ &= -2z^4(1+x^2+y^2) \leq 0 \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Also ist V eine Lyapunov-Funktion und der Gleichgewichtspunkt $(0,0,0)$ stabil.

c) Wie im Hinweis sei $z \equiv 0$. Dann müssen wir noch das folgende Problem lösen:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) - i\sin(\sqrt{3}t) & 0 \\ 0 & \cos(\sqrt{3}t) + i\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) & -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) & \cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es gilt, dass wir den Anfangswert $(x(0), y(0)) = (c_1, c_2)$ beliebig nahe an $(0,0)$ wählen können. Die Lösung ist jedoch periodisch und es gilt nicht

$$\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = (0,0).$$

Der Gleichgewichtspunkt ist also nicht asymptotisch stabil.

Aufgabe 3: * Betrachten Sie

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)^3 - 2x(t)y(t)^2 \\ y'(t) = x(t)^2 y(t) - y(t)^3. \end{cases}$$

Ist die Funktion

$$V(x,y) = x^2 + x^2y^2$$

eine Lyapunov-Funktion für den Gleichgewichtspunkt $(0,0)$? Wenn ja, welche Aussagen können Sie über die Stabilität des Gleichgewichtspunktes $(0,0)$ treffen? Wenn nein, verändern Sie die Funktion so, dass Sie eine Lyapunov-Funktion erhalten.

Lösung 3: Nein, die Funktion ist keine Lyapunov-Funktion. Es müsste dafür in einer Umgebung U des Punktes $(0,0)$ gelten, dass $V(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in U \setminus \{(0,0)\}$. Jedoch gilt für alle Punkte der Form $(0,y)$, dass $V(0,y) = 0$.

Wir können das Problem beheben, wenn wir die Funktion

$$\tilde{V}(x,y) = x^2 + x^2y^2 + y^2$$

wählen. Diese Funktion ist C^1, es gilt $\tilde{V}(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $\tilde{V}(0,0) = 0$. Außerdem finden wir

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(x,y) &= \begin{pmatrix} 2x + 2xy^2 \\ 2y + 2yx^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x^3 - 2xy^2 \\ x^2y - y^3 \end{pmatrix} \\ &= -2x^4 - 4x^2y^2 - 2x^4y^2 - 4x^2y^4 + 2y^2x^2 - 2y^4 + 2y^2x^4 - 2y^4x^2 \\ &= -2x^4 - 2x^2y^2 - 4x^2y^4 - 2y^4 - 2y^4x^2 \leq -2x^4 - 2y^4 \end{aligned}$$

und daraus folgt $\dot{\tilde{V}}(x,y) \leq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sowie $\dot{\tilde{V}}(x,y) < 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Der Punkt $(0,0)$ ist asymptotisch stabil.

Aufgabe 4 (8 Punkte)**:** Betrachten Sie das Problem

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + (b + \|\vec{x}(t)\|^2)\vec{x}(t).$$

Geben Sie in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ an, ob das System in $(0,0)$ instabil oder stabil ist.

Hinweis: Für das kritische b hilft die Funktion

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{4}(3(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2.$$

Lösung 4: Wir können das Probelm wie folgt umschreiben:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) + x_2(t) + bx_1(t) + x_1(t)(x_1(t)^2 + x_2(t)^2) \\ -x_1(t) + 2x_2(t) + bx_2(t) + x_2(t)(x_1(t)^2 + x_2(t)^2) \end{pmatrix} =: f(x_1(t), x_2(t)).$$

Es gilt

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 + b + 3x_1^2 + x_2^2 & 1 + 2x_1x_2 \\ -1 + 2x_1x_2 & 2 + b + x_1^2 + 3x_2^2 \end{pmatrix},$$

also

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 + b & 1 \\ -1 & 2 + b \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = b + \tfrac{3}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = b + \tfrac{3}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Für $b < -\frac{3}{2}$ gilt $\mathrm{Re}(\lambda_1), \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$, also ist der Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil. Für $b > -\frac{3}{2}$ gilt $\mathrm{Re}(\lambda_1), \mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$, also ist der Gleichgewichtspunkt instabil.

Für $b = -\frac{3}{2}$ verwenden wir die Funktion aus dem Hinweis. Für $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{4}(3(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$$

folgt

- $V(0,0) = 0$,
- $V(x_1, x_2) > 0$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- $\overset{\bullet}{V}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 - \frac{1}{2}x_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)$. Wegen $(x_1^2 + x_2^2) \geq \frac{2}{3}(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)$ folgt
$$\overset{\bullet}{V}(x_1, x_2) \geq \tfrac{4}{3}V(x_1, x_2)^2. \tag{1}$$

Sei nun $(x_1(t), x_2(t))$ eine Lösung mit $(x_1(0), x_2(0)) = (\delta, \delta)$ mit $\delta > 0$ beliebig klein. Es gilt $V(x_1(0), x_2(0)) = \delta^2$. Mit (1) folgt, dass $V(x_1(t), x_2(t)) \geq U(t)$ für $t > 0$, wobei U die Lösung des folgenden Problems ist:

$$\begin{cases} U'(t) = \frac{4}{3}U(t)^2, \\ U(0) = \delta^2. \end{cases}$$

Dieses Problem können wir lösen und finden $U(t) = \frac{3\delta^2}{3 - 4\delta^2 t}$. Da $\lim_{t \uparrow \frac{3}{4\delta^2}} U(t) = \infty$ und $V(x_1(t), x_2(t)) \geq U(t)$, ist auch $V(x_1(t), x_2(t))$ unbeschränkt. für steigendes t. Mit der Formel für V folgt sofort, dass dann auch $|x_1(t)| \to \infty$ oder $|x_2(t)| \to \infty$. Da wir δ beliebig klein wählen können, folgt damit die Instabilität des Gleichgewichtspunktes im Falle $b = -\frac{3}{2}$.