

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 10.11.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1:* In einem Tank mit zwei Öffnungen sind 1000 Liter Wasser enthalten. In dem Wasser sind zu Beginn 100g Salz gelöst. Pro Minute laufen 5 Liter der Salzlösung aus dem Tank und Salzwasser mit 2g Salz pro Liter fließt mit einer Rate von 5 Liter pro Minute in den Tank. Man kann annehmen, dass das Salz im Wasser zu jedem Zeitpunkt gleichmäßig verteilt ist. Stellen Sie ein Anfangswertproblem für die Menge $s(t)$ des Salzes im Tank nach t Minuten auf und lösen sie dieses.

Aufgabe 2 (20 Punkte): Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 \min \left\{ 1, \frac{1}{x(t)^2} \right\}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3:* Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$t^2 + u(t)^2 + t + tu(t)u'(t) = 0. \quad (1)$$

- Ist diese Differentialgleichung exakt? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Zeigen Sie, dass es einen integrierbaren Faktor gibt. Multiplizieren Sie dafür (1) mit einer differenzierbaren Funktion $t \mapsto \mu(t)$ und versuchen Sie diese anschließend passend zu wählen, damit die Differentialgleichung exakt wird.
- Bestimmen Sie eine Lösung von (1) mit $u(1) = 2$. Das maximale Existenzintervall muss nicht angegeben werden.

Aufgabe 4:*

- Bestimmen Sie mithilfe der Substitution $u(t) = \frac{x(t)}{1+x(t)^2}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} 4(t^4 + t^2 + 1)x'(t)(1 - x(t)^2) = -\frac{t(4t^2+2)}{\sqrt{t^4+t^2+1}}(1 + x(t)^2)^2, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Wie versteht man die Differentialgleichung bei $t = 0$?

- Ist die Lösung eindeutig?

*Unbewertete Zusatzaufgabe