Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 20/21

Gewöhnliche Differentialgleichungen

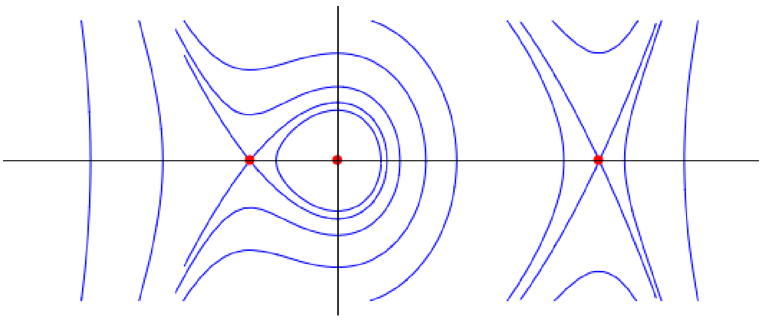
Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 26.01.2021, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (3+3+2+4)**:** Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$u''(t) = u(t)^3 - 2u(t)^2 - 3u(t).$$

Die Phasenebene sieht wie folgt aus:

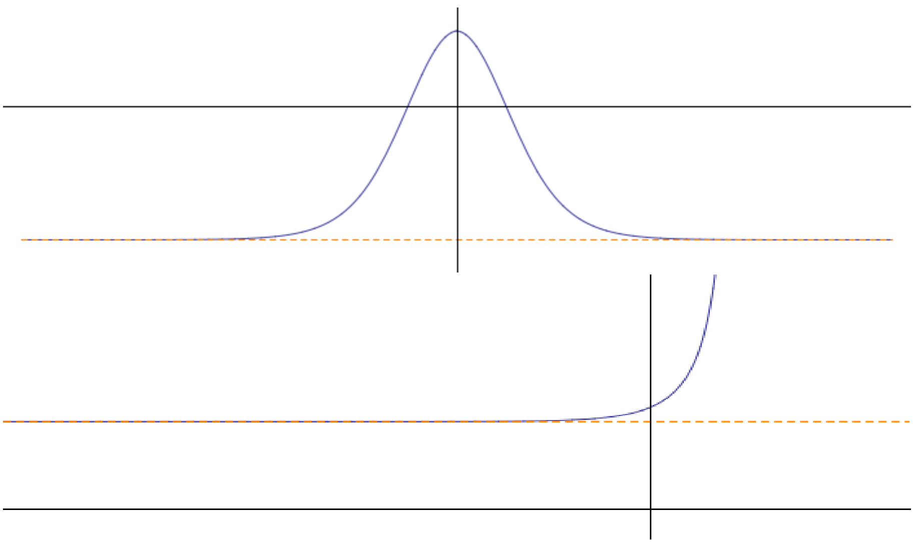


a) Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte.

b) Hat die Gleichung periodische Lösungen? Wenn ja, welche Werte können $(u(0), u'(0))$ in dem Fall annehmen?

c) Zeichnen Sie die Richtungsvektoren an die Trajektorien in der Phasenebene.

d) Im folgenden sehen Sie zwei Lösungen (in blau) mit Asymptoten (in orange) skizziert. Geben Sie die Asymptoten an und ordnen Sie die Lösungen jeweils einer Kurve in der Phasenebene zu.



Aufgabe 2: *

a) Skizzieren Sie die Phasenebene zur Differentialgleichung

$$u''(t) = u(t)(2 - 5u(t)).$$

b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u''(t) = u(t)(2 - 5u(t)), \\ u(0) = \beta, \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

periodisch und für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist sie unbeschränkt? Es kann mit Aufgabenteil a) begründet werden.

Aufgabe 3 (1+3+0+4+0 Punkte)**:** Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u''(t) = -\cos(u(t)) - u'(t) + \sin(u'(t))$$

a) Schreiben Sie diese Gleichung in ein System erster Ordnung in u und $v = u'$ um.

b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte und geben Sie die Stabilität (instabil, neutral stabil, asymptotisch stabil) der Linerarisierungen an.

c) Zeigen Sie, dass

$$V(u, v) = \tfrac{1}{2}v^2 + \sin(u) + 1$$

eine Lyapunov-Funktion ist. Leiten Sie damit die Stabilität des Systems aus Aufgabenteil a) in den Gleichgewichtspunkten her.

d) Berechnen Sie die Lösungen entlang der roten Trajektorien.

e) Begründen Sie, dass man für jeden Anfangswert $(u(0), u'(0)) \in \mathbb{R}^2$ einen Limes $\lim_{t\to\infty} u(t)$ bestimmen kann.

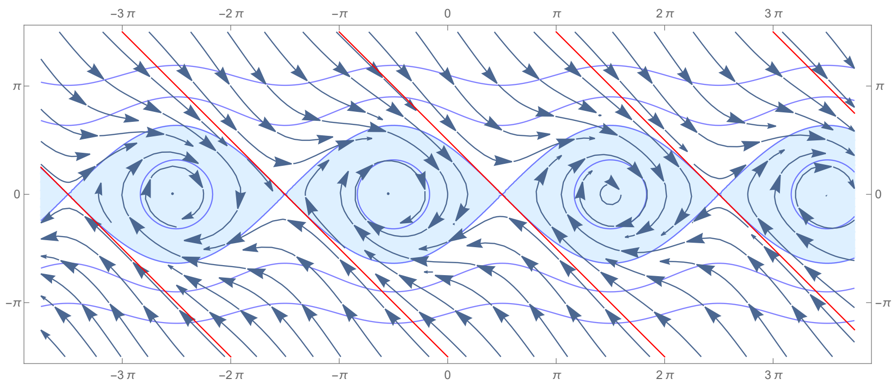


Abbildung 1: In blau sieht man einige Niveaumengen von V und das Vektorfeld. In rot sind einige Trajektorien skizziert.

Aufgabe 4: * Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u''(t) = u(t)^3 - 6u(t)^2 + 8u(t). \tag{1}$$

a) Schreiben Sie das Problem in ein System erster Ordnung und bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte.

b) Geben Sie die Stabilität in den Gleichgewichtspunkten an.

c) Addieren Sie auf der rechten Seite der Gleichung in (1) einen Term $h(u, u')$, sodass man immer noch dieselben Gleichgewichtspunkte wie in a) erhält und sich in $(2, 0)$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt befindet.
Hinweis: Denken Sie an Reibung.