Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 20/21**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 02.02.2021, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (2+2+2+3+2)**:** Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t,y) = \begin{cases} -\left(6y - t^3\right)^{2/3} & \text{für } y > \max(\frac{1}{6}t^3, 0), \\ 0 & \text{für } y \leq \max(\frac{1}{6}t^3, 0). \end{cases}$$

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

a) Kann man den Satz von Peano oder Picard-Lindelöf anwenden, um die Existenz mindestens einer Lösung $y : [t_-, t_+] \to \mathbb{R}$ mit $t_- < 0 < t_+$ für das Anfangswertproblem in (1) zu erhalten?

b) Skizzieren Sie das Vektorfeld zu der Differentialgleichung in (1).

c) Begründen Sie mit dem Vektorfeld, dass $y(t) = 0$ für $t \geq 0$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf $[0, \infty)$ ist.

d) Zeigen Sie, dass es ein $b < 0$ gibt, sodass $y(t) = bt^3$ für $t \leq 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems auf $(-\infty, 0]$ ist.

e) Besitzt das Anfangswertproblem in (1) eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung mit Existenzintervall $\mathbb{R}$?

Aufgabe 2 (5+4 Punkte)**:** Sei $f \in C(\mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ für $x \notin (0,1)$ und $f(x) \neq 0$ für $x \in (0,1)$. Betrachten Sie die Funktionenfolgen

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} & g_n &: [0,1] \to \mathbb{R} \\ f_n(x) &= f(x-n), & g_n(x) &= f\left(\tfrac{n}{n+1}x\right). \end{aligned}$$

a) Sind die Folgen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig und beschränkt?

b) Gibt es Teilfolgen $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{g_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ sowie stetige Funktionen $\tilde{f} \in C(\mathbb{R})$ und $g \in C([0,1])$, sodass

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_{n_k}(x) - \tilde{f}(x)| = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |g_{n_m}(x) - g(x)| = 0?$$

Aufgabe 3: * Begründen Sie, welche der folgenden Anfangswertprobleme eine eindeutige Lösung besitzen.

a) $\begin{cases} y'(t) = y(t)^3 - \sqrt[5]{|t|}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y'(t) = \sqrt[5]{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Aufgabe 4: * Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = -t \arctan(\sqrt[3]{y(t)}), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Besitzt das Problem eine eindeutige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort mit dem dazugehörigen Vektorfeld.

*Unbepunktete Zusatzaufgabe