Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 20/21

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 17.11.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (6+6 Punkte)**:** Berechnen Sie die orthogonalen Trajektorien zu den jeweiligen Kurvenscharen:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 + \sin(x)^2 = c\}_{c\in\mathbb{R}^+}$,

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy = c\}_{c\in\mathbb{R}}$.

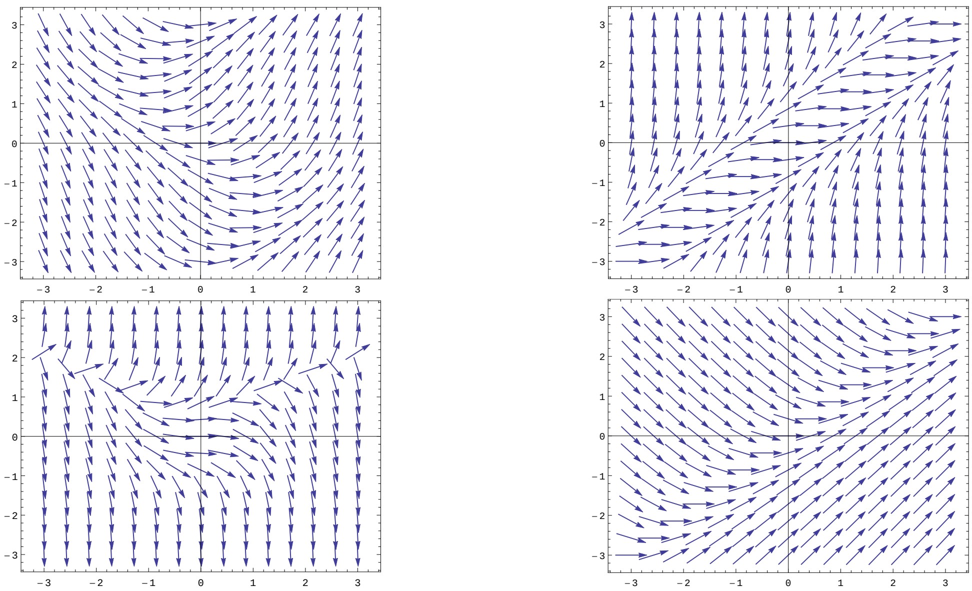
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass eine Stammfunktion von $\sin(x)^{-1}\cos(x)^{-1}$ *gleich* $\ln|\tan(x)|$ *ist.*

Aufgabe 2 (8 Punkte)**:** Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit

a) $f(x,y) = x + \sin(y)$ b) $f(x,y) = y^3 - x^2$

c) $f(x,y) = \arctan(x-y)$ d) $f(x,y) = (x-y)^2$

Welches Vektorfeld gehört zu welcher Differentialgleichung?



Aufgabe 3:* Zeigen Sie, dass falls es zwei Lösungen $y_1, y_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ der Probleme

$$\begin{cases} y_1'(t) = \frac{t+y_1(t)}{1+y_1(t)^2}, \\ y_1(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t) = \frac{t+y_2(t)}{1+y_2(t)^2}, \\ y_2(0) = 2 \end{cases}$$

gibt, dass dann

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le e^{3t} \text{ für } t \in [0,1].$$

*Unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 4: * Zeigen Sie, dass es höchstens eine stetig differenzierbare Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = |y(t)| + \arctan(y(t)^4 + t^2) + e^{-t^2}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

gibt und, dass für diese Lösung die Abschätzung

$$y(t) \leq \tfrac{2+\pi}{2} e^t - \tfrac{2+\pi}{2}$$

für $t \geq 0$ erfüllt ist.
Hinweis: Vergleichen Sie mit $x'(t) = |x(t)| + \frac{\pi}{2} + 1$.

Aufgabe 5: * Sei $a \in \mathbb{R}$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = t\sqrt[5]{y(t)^2}, \\ y(a) = 0. \end{cases}$$