Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 20/21**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 24.11.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**:** Berechnen Sie die Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Hinweis:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Aufgabe 2:[*] Geben Sie die Lösung an von

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{22}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix $A \in M^{3\times 3}(\mathbb{R})$ reell ist und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:[*] Seien $A = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$. Begründen Sie jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

a) $AB = BA$,

b) $e^A e^B = e^B e^A$,

c) $e^A e^B = e^{A+B}$,

d) $e^{tA} e^{tB} = e^{tB} e^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

[*]Unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 4 (10+0 Punkte)**:** Sind die folgenden Funktionen Lösung eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten? Wenn ja, geben Sie das System an.

a) $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 3\cos(t) + 4\sin(t) & 5\sin(t) \\ -5\sin(t) & 3\cos(t) - 4\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

b) $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 4\cos(t) + 3\sin(t) & 3\sin(t) \\ -2\sin(t) & 4\cos(t) - 3\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.