**Prof. Dr. Guido Sweers**
**Inka Schnieders, M.Sc.** **WS 20/21**

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Übungsblatt 4

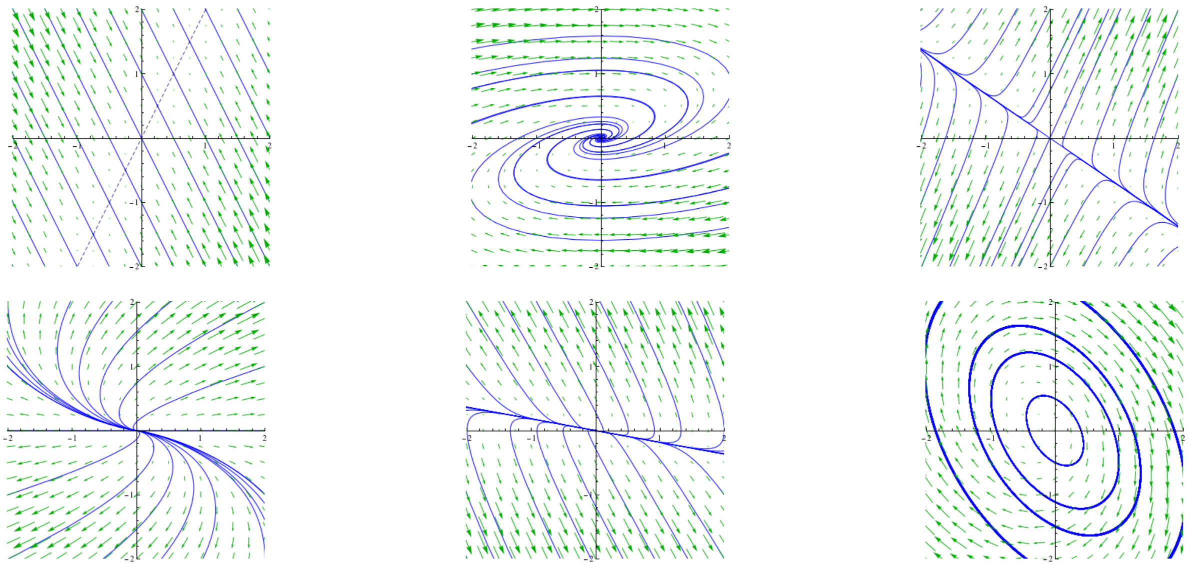
Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 01.12.2020, um 12 Uhr.

**Aufgabe 1** (6 Punkte)**:** Betrachten Sie das System $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, wobei $A$ eine der folgenden Matrizen ist:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e)} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{f)} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Ordnen Sie jedem System das passende Bild zu und geben Sie die Klassifizierung an. Die blauen Kurven stellen Lösungskurven dar und die grünen Pfeile sind das Richtungsfeld.



**Aufgabe 2** (5+5+4 Punkte)**:** Finden Sie alle Lösungen zu den folgenden linearen inhomogenen Systemen:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

mit

$$\text{a)}\ \vec{f}_a(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \vec{f}_b(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\ \vec{f}_c(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-2t} - 2e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$$

*Hinweis: Suchen Sie eine spezielle Lösung mit gezieltem Raten, d.h. versuchen Sie $\vec{x}(t) = \vec{c}e^t$ in a) und $\vec{x}(t) = \vec{p}(t)e^{-2t}$ in b), wobei $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{p}$ Polynome ersten Grades enthält.*

**Aufgabe 3:**$^*$ Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \notin \{(c, 0) \in \mathbb{R}^2; c \geq 0\}$. Betrachten Sie das System

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie mittels einer Skizze in der $(a, b)$-Ebene an, für welche $(a, b)$ das System einen stabilen, instabilen, entartet stabilen, entartet instabilen oder neutral stabilen Knoten, einen Sattelpunkt, einen stabilen oder instabilen Strudel oder ein Zentrum besitzt.

**Aufgabe 4:**$^*$ Die Matrix $A$ hat das charakteristische Polynom

a) $\det(A - \lambda I) = \lambda^4 + \lambda^3 + 25\lambda^2 + 25\lambda,$

b) $\det(A - \lambda I) = \lambda^6 - 3\lambda^5 + 5\lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda.$

Ist das System $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ stabil?

$^*$Unbewertete Zusatzaufgabe