Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 20/21**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 08.12.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} 3x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Picard-Iterationen y_1, y_2 und y_3, wenn Sie mit der konstanten Funktion

$$y_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

beginnen.

b) Verwenden Sie das Euler-Vorwärts-Verfahren, um eine Näherung für die exakte Lösung in $x = \frac{3}{2}$ zu bekommen. Dabei soll die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ verwendet werden.

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)**:** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} (\frac{1}{3} + x^2)y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$$

a) Nehmen Sie an, dass sich die Lösung als Potenzreihe schreiben lässt und finden Sie so eine Lösung des Anfangswertproblems.

b) Zeigen Sie, dass das Problem keine andere Lösung haben kann.
Hinweis: Schreiben Sie das Problem in ein System erster Ordnung um und verwenden Sie ein Ergebnis zur Eindeutigkeit von Lösungen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**:** Sei $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Picard-Iteration zu dem folgenden Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie genügend viele Iterationsschritte, um eine Formel für y_n zu erkennen. Beweisen Sie diese dann durch vollständige Induktion.

Aufgabe 4: Wir betrachten die folgenden Funktionen f_i mit $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned}
&f_1 : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), && f_1(x) = x + e^{x^2}, \\
&f_2 : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty), && (f_2(x))(t) = \tfrac{1}{3}x(t^2) - 1.
\end{aligned}$$

Beantworten Sie mit Begründung die folgenden Fragen:

a) Gilt $\|f_i(x) - f_i(y)\| < \|x - y\|$ für alle x, y aus den angegebenen Definitionsgebieten mit $x \neq y$?

b) Gibt es eine Konstante $L > 0$, sodass $\|f_i(x) - f_i(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle x, y aus den angegebenen Definitionsgebieten?

c) Wie viele Fixpunkte hat f_i?