Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 20/21

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 15.12.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (4+4+4 Punkte)**:** Wir betrachten die Abbildung gegeben durch

$$T : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty), \quad (Tf)(x) = x^3 + \tfrac{1}{3} f(\sqrt[3]{x}).$$

a) Zeigen Sie, dass T eine Kontraktion ist und dass es genau einen Fixpunkt $\tilde{f} \in C([0,1])$ gibt.

b) Berechnen Sie $\tilde{f}(0)$ und $\tilde{f}(1)$.

c) Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ eine monoton wachsende Funktion ist.

Hinweis: Fangen Sie mit einer monoton steigenden Funktion an.

Aufgabe 2:* Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(y(x)), \\ y(0) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a) Geben Sie eine Lipschitz-Konstante an, sodass die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist.

b) Zeigen Sie, dass es genau eine Lösung gibt und diese Existenzintervall $\mathbb{R}$ besitzt. Begründen Sie außerdem, dass $\lim_{x\to\infty} y(x) = \pi$ und $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**:** Wir betrachten das folgende System von Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$\begin{cases} y'''(x) = z''(x) + y'(x)^2 - 5y(x) + z(x)^3, \\ z'''(x) = 2y''(x) + y'(x) - 3z'(x)^2 - 2z(x)^2. \end{cases} \tag{1}$$

Geben Sie Bedingungen in $x = 0$ derart an, dass ein Intervall $[\underline{x}, \overline{x}] \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in (\underline{x}, \overline{x})$ und genau ein nicht-triviales Lösungspaar $y, z \in C^3([\underline{x}, \overline{x}])$ von (1) mit den gewählten Anfangswerten existiert. Begründen Sie Ihre Antwort.

*Unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 4: * Seien $y, \alpha, \beta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\beta \geq 0$ und α monoton steigend. Zeigen Sie, dass wenn

$$y(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s) y(s) ds \text{ für alle } x \in [x_0, x_1],$$

dann gilt

$$y(x) \leq \alpha(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \beta(s) ds\right) \text{ für alle } x \in [x_0, x_1].$$

Hinweis: Für eine monoton steigende Funktion $\alpha : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *gilt* $\alpha(s) \leq \alpha(x)$ *für alle* $s \in [x_0, x]$. *Dann suche man eine Stammfunktion.*