Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 20/21

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 22.12.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1:* Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte des folgenden Systems und skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y(t) - x(t)^2 + 1 \\ y(t)^2 - y(t)x(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:* Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y(t) - x(t)^2 + 1)(2 + x(t))^2 \\ (1 + x(t))(y(t) + x(t)^2 - x(t) + 1) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

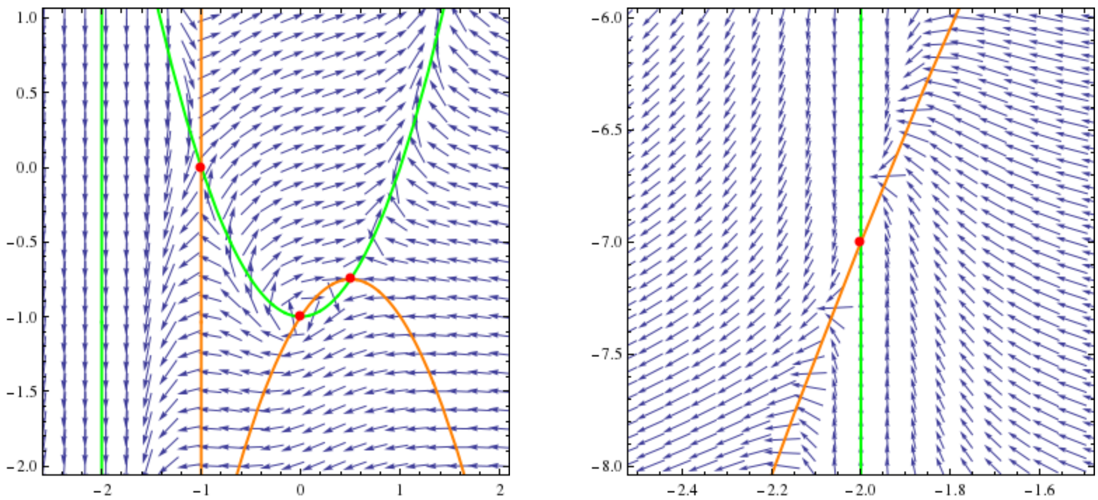
a) Zeigen Sie, dass $p_1 = (-1, 0)$, $p_2 = (-2, -7)$, $p_3 = (0, -1)$ und $p_4 = (1/2, -3/4)$ die einzigen Gleichgewichtspunkte sind.

b) Geben Sie die um p_1, p_2, p_3 und p_4 linearisierten Gleichungssysteme an.

c) Von welchen Typen sind diese Systeme? Sind sie stabil oder instabil?

d) Welche Aussagen kann man daraus für das System in (1) ableiten?

e) Ist der Punkt p_2 stabil oder instabil? Sie dürfen diese Frage mit dem Vektorfeld unten begründen.



Das Vektorfeld mit vier Nullklinen zu (1).

---

*Unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 3 (4+4+4+4+4 Punkte)**:** Es wird das folgende Gleichungssystem betrachtet:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t)^2 + 2x(t) - x(t)(x(t)^2 + y(t)^2) \\ x(t)y(t) + 2y(t) - y(t)(x(t)^2 + y(t)^2) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtspunkte des Systems $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (-\sqrt{2}, 0)$ und $p_3 = (\sqrt{2}, 0)$ sind.

b) Bestimmen Sie die Linearisierungen um p_1, p_2 und p_3. Welche Aussagen kann man über die Stabilität der linearisierten Systeme treffen? Ist das System (2) stabil oder instabil in den drei Punkten?

c) Angenommen $(x, y) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist eine Lösung von (2). Zeigen Sie, dass dann $w(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ eine Lösung der Differentialgleichung $w'(t) = -2w(t)(w(t) - 2)$ ist.

d) Sei $(x(0), y(0)) \neq (0,0)$ und $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (2). Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{t\to\infty} \|(x(t), y(t))\| = \sqrt{2}.$$

e) Geben Sie Anfangspunkte $(x_1(0), y_1(0))$ und $(x_2(0), y_2(0))$ sowie dazugehörige nicht-konstante Lösungen von (2) an, sodass

$$\lim_{t\to\infty} (x_1(t), y_1(t)) = p_2, \quad \lim_{t\to\infty} (x_2(t), y_2(t)) = p_3.$$

Hinweis: "Nicht-konstant"bedeutet hier, dass $(x_1(t), y_1(t)) = p_2$ bzw. $(x_2(t), y_2(t)) = p_3$ für alle $t \in \mathbb{R}$ nicht als Lösung genommen werden darf. Lösungen bei denen x_1 nicht-konstant ist und y_1 konstant (oder andersherum) bzw. x_2 nicht-konstant ist und y_2 konstant (oder andersherum) sind erlaubt.