Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 20/21

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 12.01.2021, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: *

a) Wir nehmen an, dass

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'(t) = TMT^{-1}y(t).$$

b) Die Funktionen

$$y(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1+t \\ 1-t \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind für $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ Lösungen von $y'(t) = Ay(t)$. Berechnen Sie $A \in M^{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)**:** Betrachten Sie das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x(t)^2 + z(t)y(t) - y(t)x(t) - y(t) - x(t) \\ 1 + x(t)^2 + y(t)z(t) - x(t)y(t) - y(t) - z(t) \\ 1 + y(t)z(t) - y(t) - z(t) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(1,1,1)$ ein Gleichgewichtspunkt ist und untersuchen Sie, ob das linearisierte System stabil oder instabil ist.

b) Ist der Punkt $(1,1,1)$ im ursprünglichen System stabil oder instabil?
Hinwies: Berechnen Sie Lösungen der Form $x(t) = y(t) = z(t)$.

*Unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)**:** Betrachten Sie das Problem

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t)(5 + x(t)y(t)) \\ y(t)(x(t)^2 + y(t) - 7) \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie ein $\varepsilon > 0$, sodass für $\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$ gilt

$$\frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2) \leq -2(x(t)^2 + y(t)^2).$$

b) Begründen Sie damit, dass dann folgendes gilt:

$$x(0)^2 + y(0)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

Was können Sie daraus für die Stabilität des Systems in $(0, 0)$ folgern?

Aufgabe 4: * Ist die folgende Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ symmetrisch und positiv definit?

$$\langle x, y \rangle = 4x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + 4x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 + 6x_3y_3.$$