Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 20/21

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen eingescannt über Ilias eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Dienstag, den 19.01.2021, um 12 Uhr.

Aufgabe 1:* Wir betrachten das Lorenz-System

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(y-x) \\ cx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}$$

mit $c \in (0,1)$ und $a, b > 0$. Zeigen Sie mithilfe einer Lyapunov-Funktion, dass der Gleichgewichtspunkt $(0,0,0)$ global asymptotisch stabil ist.
Hinweis: Verwenden Sie eine Lyapunov-Funktion der Form $V(x,y,z) = c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2$ *für geeignet gewählte* $c_1, c_2, c_3 > 0$.

Aufgabe 2 (4+4+4 Punkte)**:** Wir untersuchen das Problem

$$\begin{cases} x'(t) = 3y(t)(z(t)-1), \\ y'(t) = -x(t)(z(t)-1), \\ z'(t) = -z(t)^3(x(t)^2 + y(t)^2 + 1). \end{cases}$$

a) Linearisieren Sie das System um den Gleichgewichtspunkt $(0,0,0)$. Erhalten Sie aus der Linearisierung Informationen über die Stabilität des ursprünglichen Problems?

b) Zeigen Sie mithilfe einer (quadratischen) Lyapunov-Funktion, dass $(0,0,0)$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

c) Beweisen Sie, dass es sich nicht um einen asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt handelt.
Hinweis: Setzen Sie $z \equiv 0$.

Aufgabe 3:* Betrachten Sie

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)^3 - 2x(t)y(t)^2 \\ y'(t) = x(t)^2y(t) - y(t)^3. \end{cases}$$

Ist die Funktion

$$V(x,y) = x^2 + x^2y^2$$

eine Lyapunov-Funktion für den Gleichgewichtspunkt $(0,0)$? Wenn ja, welche Aussagen können Sie über die Stabilität des Gleichgewichtspunktes $(0,0)$ treffen? Wenn nein, verändern Sie die Funktion so, dass Sie eine Lyapunov-Funktion erhalten.

*Unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 4 (8 Punkte)**:** Betrachten Sie das Problem

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + (b + \|\vec{x}(t)\|^2)\vec{x}(t).$$

Geben Sie in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ an, ob das System in $(0,0)$ instabil oder stabil ist.

Hinweis: Für das kritische b hilft die Funktion

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{4}(3(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2.$$