

NAME:

AUFGABE 1

Berechnen Sie alle Lösungen mit dem zugehörigen maximalen Existenzintervall von

a. $u'(t) = \frac{t-1}{u(t)-1};$

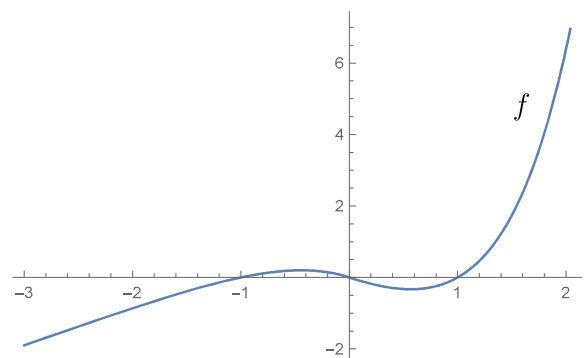
b. $z''(s) + 2z'(s) + 5z(s) = \sin(s).$

NAME:

AUFGABE 2

Wir betrachten für $f(y) = (e^y - 1)(|y| - 1)$ das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(y(x)) \text{ mit } y(0) = y_0.$$



- Begründen Sie, dass es für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung hat.
- Begründen Sie, dass eine Lösung mit $y_0 \in [-1, 1]$ ganz $\mathbb{R}$ als Existenzintervall hat.
- Was kann man für das maximale Existenzintervall (T^-, T^+) folgern, wenn $y_0 > 1$?
- Was kann man für das maximale Existenzintervall (T^-, T^+) folgern, wenn $y_0 < -1$?

NAME:

AUFGABE 3

Die konstante Summe von kinetischer und potentieller Energie für ein Pendel ohne Reibung liefert

$$\frac{1}{2}m(\ell\varphi'(t))^2 - mg\ell\cos(\varphi(t)) = E_0. \quad (1)$$

Hier ist E_0 die konstante totale Energie, ℓ die Länge des Pendels, m die Masse, g die Gravitationskonstante und $t \mapsto \varphi(t)$ der Winkel bezüglich des stabilen Ruhezustands.

- a. Zeigen Sie, wie die übliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für ein Pendel aus dieser Formel folgt und geben Sie diese Gleichung an.
- b. Umschreiben von (1) liefert:

$$\varphi'(t) = \pm F(\varphi(t)) \quad \text{mit} \quad F(\varphi) = \sqrt{\frac{2g}{\ell} \left(\frac{E_0}{\ell mg} - \cos(\varphi) \right)}.$$

Fixiere $E_0 \in (-\ell mg, \ell mg)$. Kann man mit dem Satz von Picard-Lindelöf begründen, dass das folgende Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat?

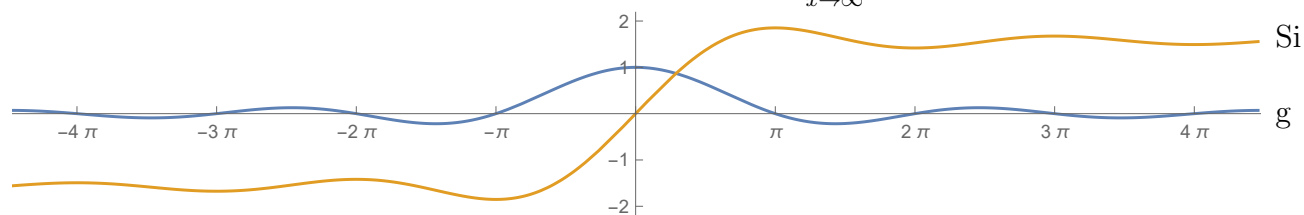
$$\begin{cases} \varphi'(t) = -F(\varphi(t)), \\ \varphi(0) = \arccos\left(\frac{E_0}{\ell mg}\right). \end{cases}$$

NAME:

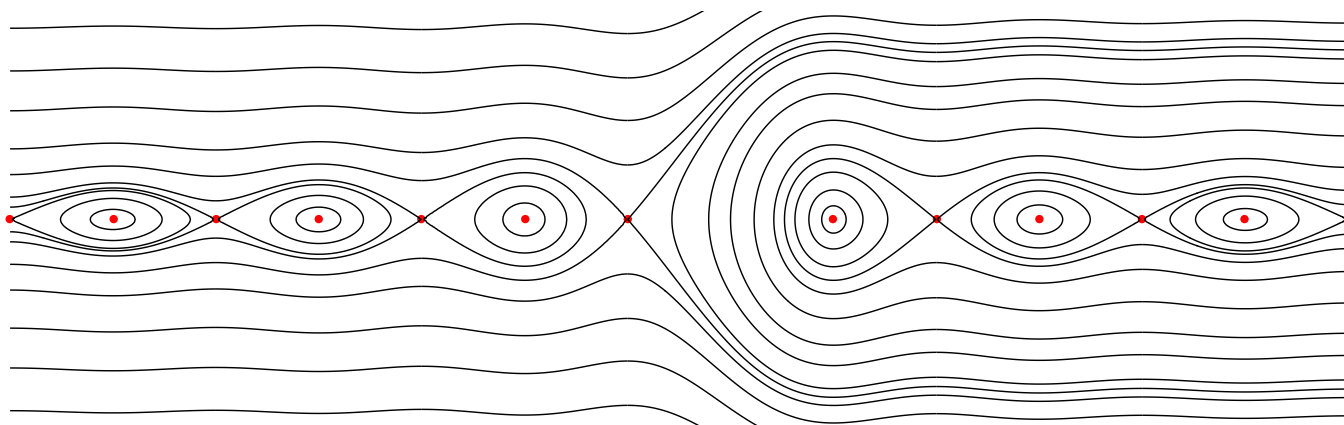
AUFGABE 4

Gegeben ist die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ für $x \neq 0$.

Die Funktion $\text{Si} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Stammfunktion von g mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Si}(x) = \frac{1}{2}\pi$.



Wir skizzieren auch die Phasenebene für die Differentialgleichung: $u''(t) = g(u(t))$. (2)



- Welche konstanten Lösungen hat (2)?
- Hat (2) (nicht-konstante) periodische Lösungen? Wenn ja, dann bitte die passenden Anfangswerte in der Phasenebene angeben.
- Gibt es (nicht-konstante) Lösungen u mit $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = c$? Für welche c ?
- Gibt es Lösungen u mit $\lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = c \neq 0$? Für welche c ?

NAME:

AUFGABE 5

Gegeben ist das System

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ mit } M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

- a. Geben Sie an, wie man eine Formel für die allgemeine Lösung konstruiert.
- b. Berechnen Sie die allgemeine Lösung.

NAME:

AUFGABE 6

Haben die folgenden Randwertprobleme eine eindeutige Lösung?

- a. $w''(x) + w(x) = 0$ mit $w(0) = w(\pi) = 0$;
- b. $v''(t) = \frac{2v(t)}{1+v(t)^2}$ mit $v(0) = v(\pi) = 0$.

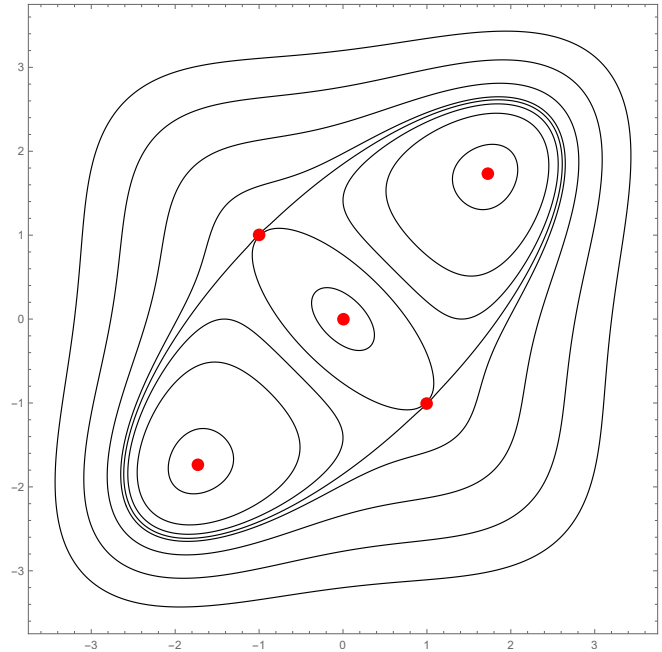
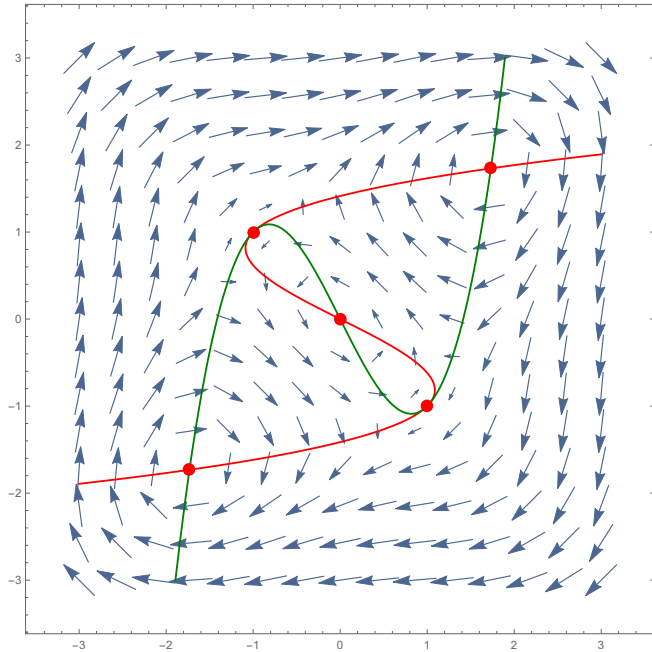
NAME:

AUFGABE 7

Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t)) \quad \text{mit} \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} -x + y(y^2 - 2) \\ y - x(x^2 - 2) \end{pmatrix}$$

und die Funktion $V(x, y) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4) - (x^2 + y^2 + xy)$.



Links eine Skizze des Vektorfeldes f mit den Nullklinen und rechts eine Skizze der Niveaulinien von V . Das System hat 5 Gleichgewichtspunkte: $(0,0)$, $\pm(1,-1)$ und $\pm(\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

- Bei jedem dieser Gleichgewichtspunkte gilt für jeden Eigenwert: $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Ist die Linearisierung bei $(1, -1)$ neutral stabil?
- Zeigen Sie, dass für jede Lösung $t \mapsto (x(t), y(t))$ der Differentialgleichung gilt, dass

$$V(x(t), y(t)) = V(x(0), y(0)).$$

- Ist $-V$ eine Lyapunov-Funktion bei $(0,0)$? Beweisen Sie Ihre Antwort.
- Nicht alle 5 Gleichgewichtspunkte sind neutral stabil. Begründen Sie, welche stabil und welche instabil sind.