Prof. Guido Sweers **SS 2009**
Matthias Erven

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 1

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 23.4.2009, um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass für Polarkoordinaten, also $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$, gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die nur von $\|x\|$ abhängen, für die also ein $\tilde{f}$ mit $f(x) = \tilde{f}(\|x\|)$ existiert, folgendes gilt:

$$\Delta f(x) = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(r) \text{ für } r = \|x\|.$$

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie für $f \in C^{0,\alpha}([0,1];\mathbb{R})$ und $g \in C^{0,\beta}([0,1];\mathbb{R})$:
   (i) $f + g \in C^{0,\min(\alpha,\beta)}([0,1];\mathbb{R})$;
   (ii) $f.g \in C^{0,\min(\alpha,\beta)}([0,1];\mathbb{R})$.

b) Ergänzen Sie: Wenn $f \in C^{1,\alpha}([0,1];\mathbb{R})$ und $g \in C^{1,\beta}([0,1];\mathbb{R})$, dann gilt
   (i) $f + g \in C^{1,\dots\dots}([0,1];\mathbb{R})$;
   (ii) $f.g \in C^{1,\dots\dots}([0,1];\mathbb{R})$.

c) Zeigen Sie: Wenn $f \in C^{0,\alpha}([0,1];\mathbb{R})$ und $g \in C^{0,\beta}(f[0,1];\mathbb{R})$, dann gilt $g \circ f \in C^{0,\alpha\beta}([0,1];\mathbb{R})$.

d) Ergänzen Sie: Wenn $f \in C^{1,\alpha}([0,1];\mathbb{R})$ und $g \in C^{1,\beta}(f[0,1];\mathbb{R})$, dann gilt $g \circ f \in C^{1,\dots\dots}([0,1];\mathbb{R})$.

Aufgabe 4:

a) Zu welcher Differentialgleichung wird

$$u_{xx} - u_{yy} = f,$$

wenn die Substitution $s = x + y$, $t = x - y$ durchgeführt wird?

b) Zeigen Sie, dass jedes Paar von Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ durch

$$u(x,y) = g(x-y) + h(x+y) \tag{1}$$

eine Lösung liefert zu

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{2}$$

c) Zeigen Sie, dass sich jede klassische Lösung von (2) schreiben lässt wie in (1).