Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **SS 2009**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 10

Diese Hausaufgaben werden am Montag, den 6. Juli um 8:15 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: *Küchenmathematik*
Geflügel aus der Gattung Galliformes, das im Ofen zubereitet wird, heiße gar, sobald es an jedem Punkt in seinem Inneren eine Temperatur von mindestens 100 Grad Celsius hat. Messungen in verschiedenen Haushalten haben ergeben, dass ein Hähnchen von 1.5 kg in einem auf 200 Grad Celsius vorgeheizten Backofen nach genau einer Stunde gar ist. Wie lange braucht man, um einen Truthahn von 6 kg zu garen?
Hinweis: Nehmen Sie an, dass ein Truthahn ein skaliertes Hähnchen ist.

Aufgabe 2: Betrachten Sie

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \partial_x^2\right) u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \left(x,t\right) \in \left(0,1\right) \times \mathbb{R}^+, \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) & \text{für } x \in \left(0,1\right), \\ u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \left(x,t\right) \in \left\{0,1\right\} \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

für $u_0 \in C_0\left[0,1\right]$. Zeigen Sie, dass für die Lösung $u \in C^2\left(\left[0,1\right] \times \mathbb{R}^+\right) \cap C\left(\left[0,1\right] \times \left[0,\infty\right)\right)$ die folgenden Abschätzungen gelten:

a) $\left\|u\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^\infty(0,1)} \leq \left\|u_0\right\|_{L^\infty(0,1)}$. *Hinweis:* Maximumprinzip.

b) $\left\|u\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^2(0,1)} \leq e^{-\pi^2 t}\left\|u_0\right\|_{L^2(0,1)}$.
Hinweis: Betrachten Sie $\partial_t \int_0^1 u(x,t)^2 dx$. Verwenden Sie, dass für $w \in C^2\left[0,1\right] \cap C_0\left[0,1\right]$ gilt: $\int_0^1 w'\left(x\right)^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 w\left(x\right)^2 dx$.

c) * $\left\|u\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left\|u_0\right\|_{L^1(0,1)}$. *Hinweis:* Maximumprinzip.

Aufgabe 3: Welche dieser Abschätzungen a) bis c) sind optimal?

Aufgabe 4: Geben Sie ähnliche Abschätzungen† an für beschränkte glatte Lösungen von

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \partial_x^2\right) u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \left(x,t\right) \in \left(0,1\right) \times \mathbb{R}^+, \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) & \text{für } x \in \left(0,1\right), \\ \partial_x u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \left(x,t\right) \in \left\{0,1\right\} \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Anmeldung zur Klausur
Um an der Klausur am 25. Juli teilzunehmen, melden Sie sich bitte bei Matthias Erven (per E-Mail oder persönlich) an. Anmeldeschluss ist Freitag, der 17. Juli um 23:59 Uhr.

---

*unbewertete Zusatzaufgabe
†Eine richtige Abschätzung gibt 3 Punkte, zwei geben 5 Punkte.