Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2009

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 11

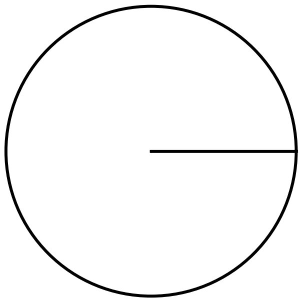
Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 9. Juli um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: Wir setzen $\Omega := B_1(0,0) \setminus ([0,1) \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ und definieren darauf u in Polarkoordinaten durch

$$u\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) := \sqrt{r}\sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass u das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } [0,1] \times \{0\} \\ u\left(\cos\varphi, \sin\varphi\right) = \sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) & \text{für } \varphi \in (0, 2\pi) \end{cases}$$



b) In welchen Räumen $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ liegt u?

Aufgabe 2: (10 Punkte) Finden Sie eine Fundamentallösung zum biharmonischen Operator (Bi-Laplace-Operator) in Raumdimension $n \in \mathbb{N}^+$, d.h. eine Funktion $F_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, für die

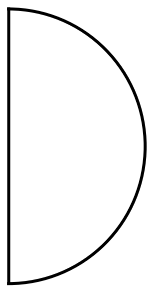
$$\Delta^2 F_n = \delta_0$$

im Sinne von Distributionen gilt. Es genügt, wenn Sie den Nachweis für Schwartz-Distributionen und $n > 4$ erbringen.
Hinweis: Schauen Sie sich radialsymmetrische Lösungen von $\Delta^2 F = 0$ für $r > 0$ an.

Aufgabe 3: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ die rechte Halbkugel mit Radius 1, d.h. $D := \{(x_1, x_2) \in B_1(0,0); x_1 > 0\}$. Bestimmen Sie die Green-Funktion zur Poisson-Gleichung auf D mit Dirichlet-Randwerten, also die Funktion $G(x,y)$, für die

$$u(x) := \int_D G(x,y) f(y)\, dy$$

(für genügend glattes f) das folgende Randwertproblem löst:



$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } D \\ u = 0 & \text{auf } \partial D \end{cases}$$