Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2009

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 12

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 16. Juli 2009 um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ superharmonisch und nicht konstant. Zeigen Sie, dass u kein Minimum innerhalb von Ω haben kann.

Aufgabe 2: Sei $R > 0$ und u harmonisch und nichtnegativ auf $B_{R+1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Sei $0 < r < R$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in B_r(0)$ gilt:

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} u(0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r} u(0)$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie oder bringen Sie ein Gegenbeispiel $(n \geq 2)$:

a) Wenn u harmonisch ist auf $\mathbb{R}^n$ und wenn $u(x) \geq 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist u konstant.

b) Wenn u harmonisch ist auf $\mathbb{R}^n$ und wenn $u(x) < M$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist u konstant.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die Funktion u, definiert durch $u(x) = 1 - \|x\|$ superharmonisch auf $B_1(0) \subset R^n$ $(n \geq 2)$ ist.