Prof. Guido Sweers **SS 2009**
Matthias Erven

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 2

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 30.4.2009, um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\sigma \in \mathbb{R}$. Welche Differentialgleichung erfüllt eine Funktion $u \in C^4(\overline{\Omega})$ mit

$$\int_\Omega \left(\Delta u \Delta \varphi - \sigma \left(u_{xx}\varphi_{yy} + u_{yy}\varphi_{xx} - 2u_{xy}\varphi_{xy}\right)\right) d\,(x,y) = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)?$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass

$$v(t,x) = t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

für $x \in \mathbb{R}^3$ und $t > 0$ eine Lösung ist von

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) v = 0.$$

Aufgabe 3: Auf $\Omega := \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,; 0 < r < 1 \text{ und } 0 < \varphi < \frac{3}{2}\pi\right\}$ sei $U : \Omega \to \mathbb{R}$ durch Polarkoordinaten folgendermaßen definiert:

$$U(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := u(r,\varphi) := \left(r^{\frac{2}{3}} - r^{-\frac{2}{3}}\right)\sin(\tfrac{2}{3}\varphi)$$

a) Zeigen sie, dass U in Ω die Differentialgleichung $-\Delta U = 0$ erfüllt:

b) Zeigen Sie folgendes Randverhalten:

$$\lim_{r \uparrow 1} u(r,\varphi) = 0 \qquad \text{für } \varphi \in \left(0, \tfrac{3}{2}\pi\right)$$
$$\lim_{\varphi \downarrow 0} u(r,\varphi) = \lim_{\varphi \uparrow \frac{3}{2}\pi} u(r,\varphi) = 0 \qquad \text{für } r \in (0,1)$$

c) In der Vorlesung zur Funktionentheorie wurde gezeigt, dass harmonische Funktionen ihr Maximum auf dem Rande annehmen. Wie verhält es sich mit U?

d) Zeigen Sie, dass $U, \nabla U \in L^1(\Omega)$. *Hinweis:* Verwenden Sie Polarkoordinaten.

bitte wenden

Aufgabe 4: Es ist bereits bekannt, dass $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \text{falls } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{falls } \|x\| \geq 1 \end{cases},$$

beliebig oft differenzierbar ist. Man definiere nun für $\varepsilon > 0$ die Funktion $\Psi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\Psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\tilde{x})\, d\tilde{x} \right)^{-1} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

a) Zeigen Sie für alle $\varepsilon > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(x)\, dx = 1$$

Sei nun $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger. Man definiere für $\varepsilon > 0$ die Funktion $u_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$u_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\Psi_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

b) Zeigen Sie, dass u_ε stetig differenzierbar ist.

c) Zeigen Sie, dass $\|u_\varepsilon - u\|_\infty \to 0$ für $\varepsilon \downarrow 0$.