

**Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 3**

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 7.5.2009 um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1:

- a) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite $u_{tt} = cu_{xx}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und mit Randwertbedingungen $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ hat Lösungen der Form

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Diese Lösungen nennt man Eigenschwingungen. Berechnen Sie alle solche Lösungen. Diese Lösungen sind periodisch in der Zeit. Welche Perioden treten auf?

- b) Auch die Differentialgleichung des schwingenden Balkens $u_{tt} = \sigma u_{xxxx}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und mit Randwertbedingungen $u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(\ell, t) = u_{xx}(\ell, t) = 0$ hat Lösungen der Form

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Berechnen Sie auch alle solche Lösungen. Welche Perioden treten hier auf?

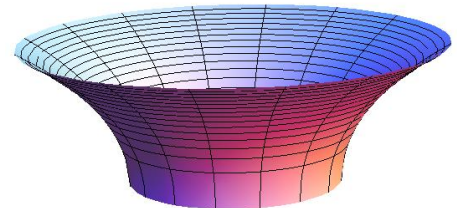
- c) Beide Probleme haben in Wirklichkeit einen Reibungsterm:

$$u_{tt} = cu_{xx} - \varepsilon u_t \text{ und } u_{tt} = \sigma u_{xxxx} - \varepsilon u_t$$

Berechnen Sie auch hier die Lösungen der Form $X(x)T(t)$.

- Aufgabe 2:** Die partielle Differentialgleichung für eine Minimalfläche ist

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u(x, y)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x, y)|^2}} \right) = 0.$$



- a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung für radialsymmetrische Funktionen zur folgenden Gleichung wird:

$$\partial_r \left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1 + |U_r(r)|^2}} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1 + |U_r(r)|^2}} \right) = 0.$$

- b) Sei $h > 0$. Berechnen Sie wenn möglich eine Lösung für

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u(x, y)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x, y)|^2}} \right) = 0 & \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ u(x, y) = 0 & \text{für } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x, y) = h & \text{für } x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

- c) Welchen Wert darf h maximal annehmen, damit eine Lösung $(x, y) \mapsto u(x, y)$ existiert?