Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **SS 2009**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 5

Diese Hausaufgaben werden am Freitag, den 22.5.2009 um 9 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: Sei $n > 2$. Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \\ u = \varphi & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

die folgende Eigenschaft hat: Für $x \in B_1(0)$ gilt

$$u(x) = \int_{B_1(0)} G(x,y)\, f(y)\, dy - \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\, \varphi(y)\, d\sigma_y$$

mit $\omega_n = \int_{B_1(0)} 1 dy$ und

$$G(x,y) = \frac{1}{(n-2)\, n\omega_n} \left(\left\| x\, \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^{2-n} - \|x-y\|^{2-n} \right).$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Bereiche, wo die Differentialgleichung $u_{xx} + y u_{yy} = f$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ elliptisch/parabolisch/hyperbolisch ist.

Aufgabe 3: a) Zu welchen Typ gehört die folgende partielle Differentialgleichung?

$$u_{xx} + 3u_{yy} - 2u_x + 24u_y + 5u = f.$$

b) Zeigen Sie, dass man durch $u(x,y) = v(x,y)\, e^{\alpha x + \beta y}$ und neue Koordinaten diese Gleichung vereinfachen kann zu

$$w_{ss} + w_{tt} + cw = \tilde{f}.$$

Aufgabe 4: Für $x \in (0,1)$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\,\pi} \sin\left((2k+1)\,\pi x\right) = 1. \tag{1}$$

a) Ist diese Konvergenz gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

b) *Zeigen Sie, dass

$$u(x,y) = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} \frac{16}{(2k+1)(2\ell+1)\,\pi^4} \left(\frac{1}{(2k+1)^2 + \frac{1}{4}(2\ell+1)^2} \right) \sin\left((2k+1)\,\pi x\right) \sin\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\pi y\right)$$

gleichmäßig konvergiert auf $\mathbb{R}^2$.

c) Nehmen wir an, dass (1) gleichmäßig auf $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ konvergiere für $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass u für $\Omega = (0,1) \times (0,2)$ eine $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$-Lösung ist von

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

*unbewertete Zusatzaufgabe