Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **SS 2009**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 6

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 28.5.2009 um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie eine Lösung für

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sin(x+2t) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

und lassen Sie diese von einem Computeralgebrasystem zeichnen.

Aufgabe 2: Wie kann man eine Lösung konstruieren zu

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) & \text{für } x \in (0,l) \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0,l), \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in (0,l), \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 & \text{für } t > 0? \end{cases}$$

Eine Angabe des Verfahrens genügt.

Aufgabe 3:

a) Seien $(A, \|.\|_A)$ und $(B, \|.\|_B)$ normierte Vektorräume. Sei $L : A \to B$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (i) L ist stetig.
   (ii) L ist stetig in 0.
   (iii) L ist beschränkt, d.h. es existiert ein $M > 0$, so dass $\|La\|_B < M \|a\|_B$ gilt für alle $a \in A$.

b) Sei nun $A = \mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Norm, $(B, \|.\|_B)$ ein beliebiger normierter Vektorraum und $L : A \to B$ linear. Zeigen Sie, dass L dann stetig ist.

Aufgabe 4: Es sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|$.

a) Zeigen Sie, dass durch
$$T_f(\varphi) := \int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{1}$$
eine stetige lineare Abbildung $T_f : C_0^1[-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert wird.

b) Zeigen Sie, dass durch
$$T_f'(\varphi) := -T_f(\varphi')$$
eine stetige lineare Abbildung $T_f' : C_0^1[-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert wird.

c) Gibt es eine Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, so dass $T_f' = T_g$ gilt, wobei T_g wie in (1) definiert ist?